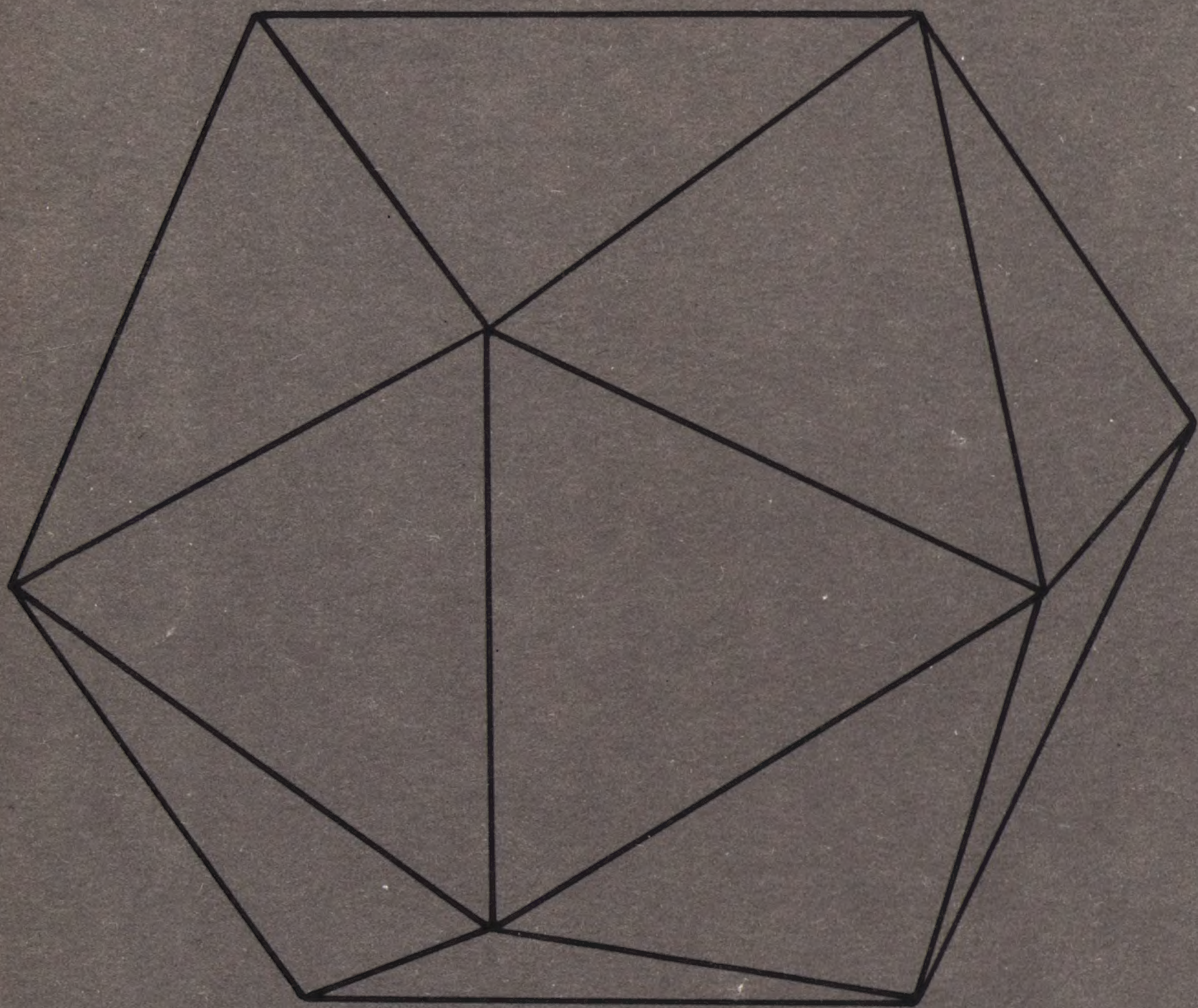
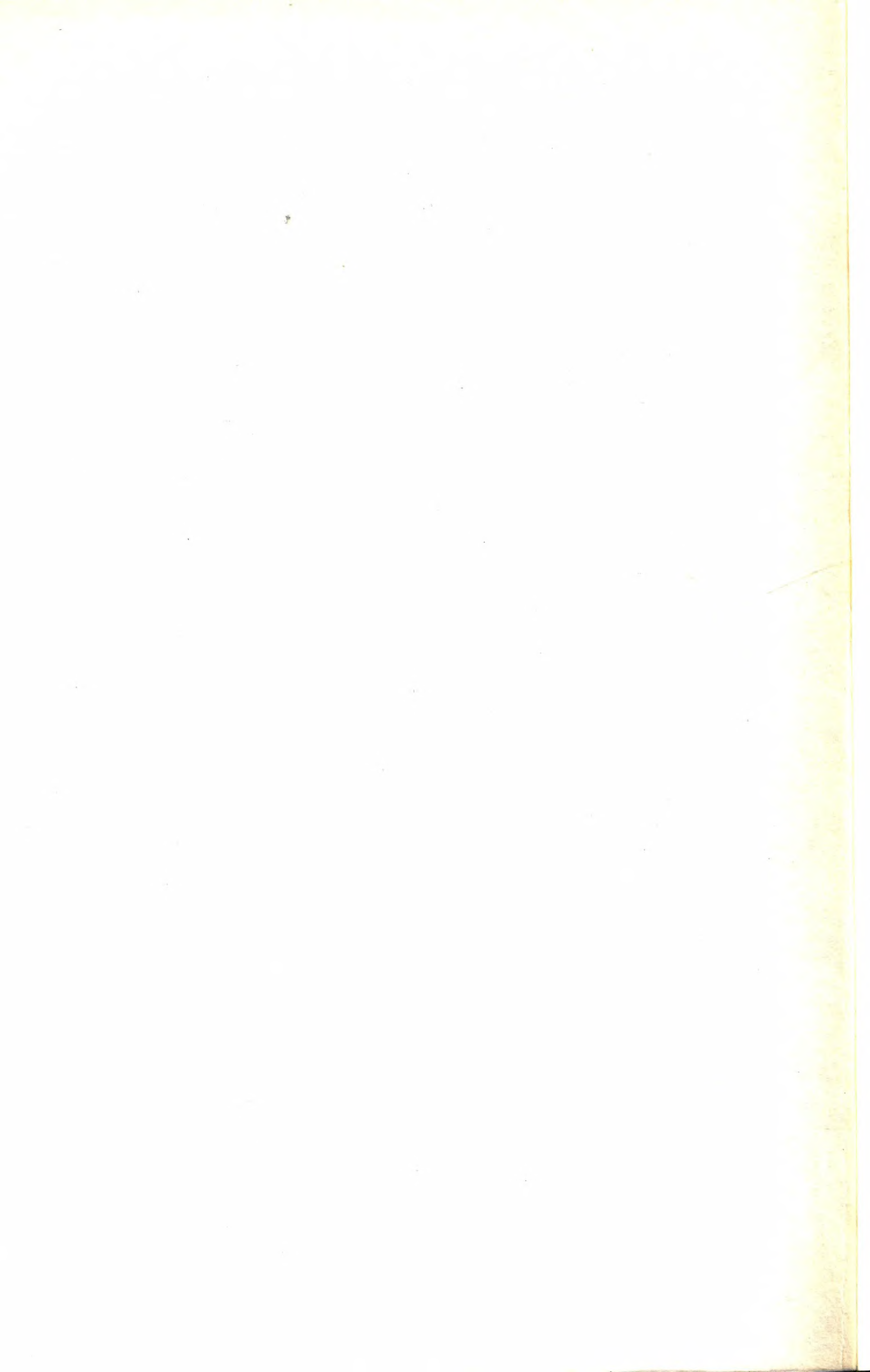


А.Брёнстед

Введение
в теорию
выпуклых
многогранников



Издательство «Мир»



Введение в теорию выпуклых многогранников

GRADUATE TEXTS IN MATHEMATICS 90

Editorial Board: F.W. Gehring,
P.R. Halmos (Managing Editor), C.C. Moore

AN INTRODUCTION TO CONVEX POLYTOPES

ARNE BRØNSTED

Københavns Universitets
Matematiske Institut
Danmark

SPRINGER-VERLAG

New York · Heidelberg · Berlin

А.Брёнстед

**Введение
в теорию
выпуклых
многогранников**

Перевод с английского

К.И. Осколкова

под редакцией

Б.С. Кашина



Москва «Мир» 1988

ББК 22.151
Б 87
УДК 514.172.45

Брёнстед А.

Б 87 Введение в теорию выпуклых многогранников: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 240 с., ил.

ISBN 5-03-001115-3

Небольшая книга датского математика, отражающая результаты, полученные за последние годы в комбинаторной теории выпуклых многогранников. В ней представлены соотношения Дена — Коммервилля, теоремы Макмоллена и Барнетта о максимальном и минимальном числе граней. Изложение отличается математической строгостью. В книге много упражнений и задач; она доступна для первого ознакомления с предметом.

Для математиков разных специальностей, аспирантов и студентов университетов.

Б $\frac{1702040000 - 489}{041(01) - 88}$ 16 - 88, ч. 1

ББК 22.151

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-001115-3 (русск.)
ISBN 0-387-90722-X (англ.)

- © 1983 by Springer-Verlag New York Inc.
All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
- © перевод на русский язык, «Мир», 1988

От редактора перевода

Предлагаемая читателю книга посвящена комбинаторной теории выпуклых многогранников. Наряду с классическими результатами в ней отражён значительный прогресс, достигнутый в этой области в 70–80-х годах. Важность и красота предмета, последовательность и ясность изложения, минимальные требования к подготовке читателя позволяют рекомендовать эту книгу студентам младших курсов. Книга будет полезна и всем желающим пополнить и упорядочить свои знания о выпуклых многогранниках.

При подготовке русского издания автором был устранён ряд мелких неточностей и несколько расширен список литературы. В частности, была добавлена посвящённая комбинаторной теории выпуклых многогранников монография В.А. Емеличева, М.М. Ковалёва и М.К. Кравцова [28], в которой много внимания уделено и прикладным аспектам этой темы.

Б.С. Кашин

Предисловие

Цель настоящей книги — ввести читателя в чарующий мир выпуклых многогранников.

Кульминационные моменты книги — это три главные теоремы комбинаторной теории выпуклых многогранников, известные как соотношения (или уравнения) Дена — Соммервилля, теорема о максимальном числе граней и теорема о минимальном числе граней. Все предварительные сведения о выпуклых множествах и выпуклых многогранниках, нужные для того, чтобы понять и в должной мере оценить эти три теоремы, подробно излагаются в книге. Этот подготовительный материал образует основу для изучения и других разделов теории многогранников.

Уравнения Дена — Соммервилля стали уже классическими, доказательства же теорем о максимальном и минимальном числе граней относятся к более позднему времени — они были найдены в начале семидесятых годов П. Макмюлленом и Д. Барнеттом соответственно. К тому же периоду времени относится и знаменитая гипотеза Макмюллена о характеристике f -векторов простых или симплициальных многогранников; книга заканчивается кратким обсуждением этой

гипотезы и её связи с уравнениями Дена – Коммервилля, а также с теоремами о максимальном и минимальном числе граней. Однако недавно полученные доказательства того, что условия Макмюллена, действительно, и достаточны (Л.Дж. Биллера и Ч.У. Ли, 1980), и необходимы (Р.П. Стэнли, 1980), выходят за рамки нашей книги.

Требования, предъявляемые к подготовке читателя, весьма скромны; обычная линейная алгебра и элементарные факты о топологии пространства $\mathbb{R}^d$ – вот и всё, что нужно.

Автор признателен многим лицам, внёсшим свой вклад в эту книгу. Целый ряд коллег, и в особенности Виктор Кли и Эрик Спарре Андерсен, снабдили его полезной информацией. Оге Бондесен предложил несколько существенных улучшений. Некоторые улучшения были предложены также студентами Копенгагенского университета. Наконец, Улла Якобсен превосходно напечатала рукопись.

Копенгаген
Февраль 1982

Арне Брёнстед

Введение

Выпуклые α -мерные многогранники — это α -мерные аналоги двумерных выпуклых многоугольников и трёхмерных выпуклых многогранников. Тема этой книги — комбинаторная теория выпуклых многогранников. В общих словах, комбинаторная теория имеет дело с числами граней различной размерности (вершин, рёбер и т. д.). Примером здесь может служить знаменитая теорема Эйлера, которая утверждает, что для трёхмерного выпуклого многогранника число f_0 вершин, число f_1 рёбер и число f_2 граней связаны соотношением

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2.$$

(Существует и метрическая теория выпуклых многогранников, которая в отличие от комбинаторной имеет дело с такими понятиями, как длина, угол, объём¹. Например, понятие регулярного многогранника принадлежит к метрической теории.)

¹ По поводу метрической теории выпуклых многогранников см., например, [29]. — Прим. ред.

Основной текст книги разбит на три главы, после них идут три добавления. В этих добавлениях приводится необходимая информация о решётках, графах и комбинаторных тождествах. После добавлений и перед списком литературы помещён раздел с историко-библиографическими комментариями. Каждый из параграфов первых двух глав завершается соответствующей подборкой упражнений.

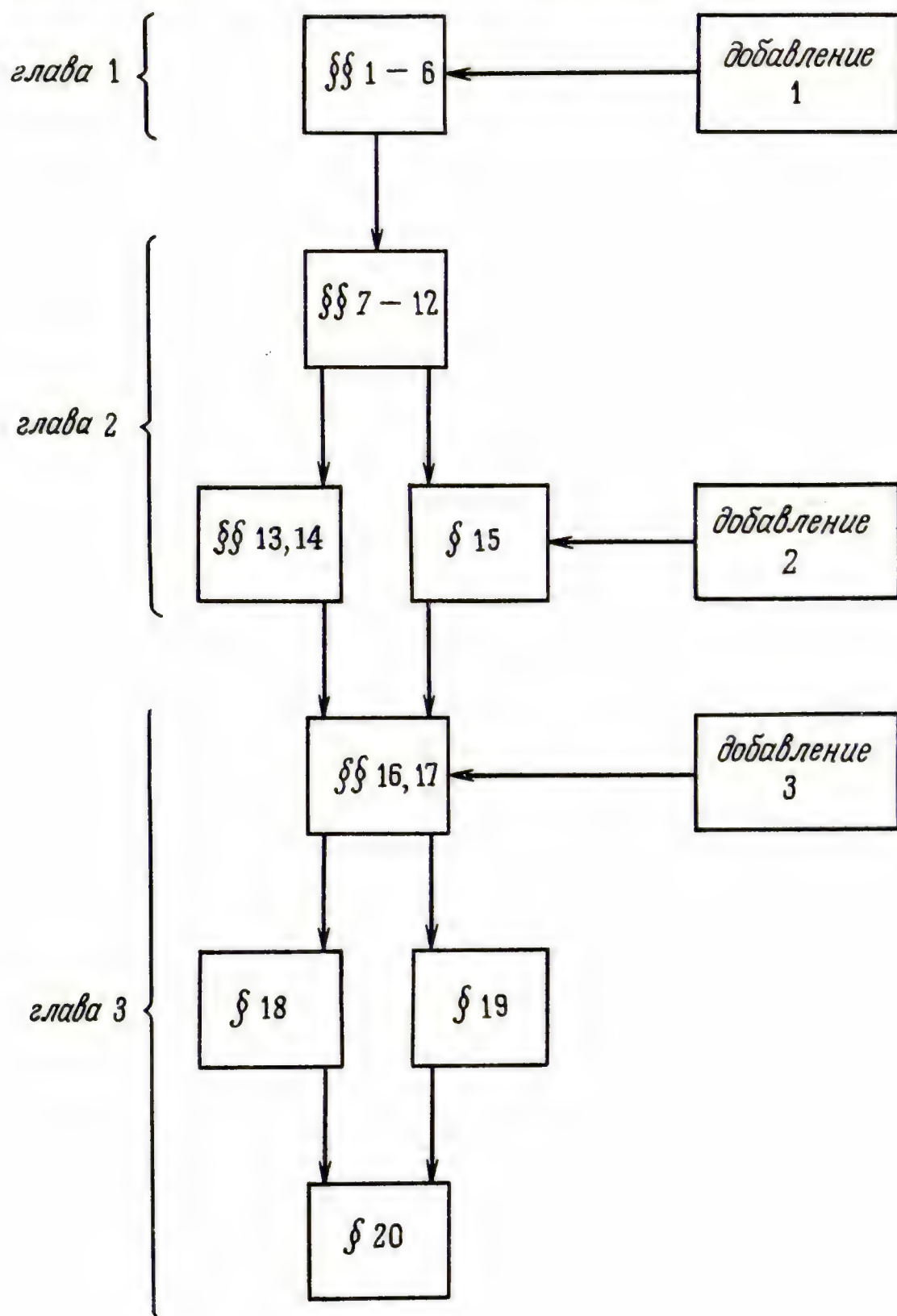
Глава 1 (§§ 1 – 6), озаглавленная "Выпуклые множества", содержит нужные для дальнейшего сведения из общей теории d -мерных выпуклых множеств. В числе главных понятий здесь – выпуклая оболочка, относительная внутренность выпуклого множества, опорная гиперплоскость, грань замкнутого выпуклого множества, полярность. (Отметим, что мы не касаемся таких фундаментальных понятий теории выпуклости, как выпуклый конус и выпуклая функция.)

Глава 2 (§§ 7 – 15) называется "Выпуклые многогранники". В §§ 7 – 11 общая теория выпуклых множеств, разработанная в гл. 1, применяется к частному случаю выпуклых многогранников. (По мнению автора, лишь на фоне свойств общих выпуклых множеств можно по-настоящему оценить многие свойства выпуклых многогранников.) В §§ 12 – 14 вводятся важные классы простых, симплициальных, циклических и смежностных многогранников. В § 15 изучается граф, задаваемый вершинами и гранями многогранника.

Глава 3 (§§ 16 – 20), носящая название "Комбинаторная теория выпуклых многогранников", посвящена избранным вопросам этой теории. Мы начинаем с формулы Эйлера для d -мерного случая (§ 16). В § 17 обсуждаются так называемые уравнения Дена – Коммервилля, которые представляют собой соотношения типа формулы Эйлера, справедливые только для простых или симплициальных многогранников. В §§ 18 и 19 доказываются знаменитые теоремы о максимальном и минимальном числе граней; эти теоремы дают решение важных задач об экстремуме числа граней различных размерностей для простых или симплициальных многогранников. Наконец, в § 20 обсуждается недавно полученная фундаментальная теорема, дающая "полную информацию" о числе граней (различной размерности) для простых или симплициальных многогранников.

Приводимая далее схема поясняет структуру книги. Однако к каждой из трёх основных теорем гл. 3 можно пройти и "напрямик", существенно сократив путь. Для того чтобы разобраться в выводе

уравнений Дена – Коммервилля (теорема 17.1) нужны лишь §§ 1 – 12 и формула Эйлера; для вывода этой последней нужна ещё теорема 15.1. Чтобы понять доказательство теоремы о максимальном числе граней (теорема 18.1), достаточно §§ 1 – 14 и теорем 15.1 – 15.3. А чтобы понять теорему о минимальном числе граней (теорема 19.1), достаточно прочесть §§ 1 – 12 и § 15 вместе с добавлением 2. Отметим, что ни один из этих трёх сокращённых маршрутов не проходит через добавление 3, технически довольно сложное.



ГЛАВА 1

Выпуклые множества

§1. АФФИННАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^d$

Теория выпуклых многогранников и, вообще, выпуклых множеств является предметом аффинной геометрии. Собственно говоря, правильные рамки для исследования выпуклых множеств доставляет понятие эвклидова пространства, т. е. конечномерного вещественного аффинного пространства, "подстилающее" линейное пространство которого снабжено скалярным произведением. Однако никакой особой потери общности не будет, если иметь дело лишь с более конкретными пространствами $\mathbb{R}^d$; поэтому у нас всё будет происходить в $\mathbb{R}^d$. Мы предполагаем, что читатель знаком с обычной линейной теорией пространств $\mathbb{R}^d$, включая такие понятия, как подпространство, линейная независимость, размерность, линейное отображение. Мы также предполагаем знакомство с обычным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $\mathbb{R}^d$ и индуцированной им нормой $\| \cdot \|$ и с простейшими топологическими понятиями, такими как внутренность $\text{int } M$, замыкание $\text{cl } M$ и граница $\text{bd } M$ подмножества M в $\mathbb{R}^d$.

Цель данного параграфа – дать краткий обзор основных результатов аффинной теории пространств $\mathbb{R}^d$. Доказательств мы не даём; предлагаем читателю самому доказать их, сводя утверждения аффинной теории к утверждениям линейной. Важно, чтобы читатель привык к аффинной структуре пространств $\mathbb{R}^d$.

Для $d \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathbb{R}^d$ множество всех d -наборов $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$. Множество $\mathbb{R}^1$ будем отождествлять с $\mathbb{R}$ и будем по определению считать, что $\mathbb{R}^0 := \{0\}$.

Напомним некоторые основные факты о линейной структуре $\mathbb{R}^d$. Наделённое обычными линейными операциями, $\mathbb{R}^d$ является линейным пространством. В случае когда на первый план выходит линейная структура $\mathbb{R}^d$, его элементы называют векторами. Нулевой вектор будем обозначать буквой 0 .

Линейным подпространством в $\mathbb{R}^d$ называется всякое непустое его подмножество L , такое что

- (а) $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ принадлежит L для всех $x_1, x_2 \in L$ и всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Линейная комбинация векторов $x_1, \dots, x_n$ из $\mathbb{R}^d$ – это вектор вида $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – элементы из $\mathbb{R}$. Мы допускаем и пустую линейную комбинацию (отвечающую случаю $n = 0$) со значением 0 . (В понятии линейной комбинации есть известная двусмысленность: в некоторых ситуациях, говоря о линейной комбинации $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, мы имеем в виду не только вектор $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, но также и конкретный набор коэффициентов, использованных для представления x .) Условие (а) означает, что любая линейная комбинация двух векторов из L принадлежит L . Фактически (а) эквивалентно следующему условию:

- (б) Любая линейная комбинация векторов из L принадлежит L .

(Строго говоря, (а) и (б) эквивалентны, только если $L \neq \emptyset$. Для $L = \emptyset$ условие (а) выполнено, а (б) нет, поскольку мы допускаем пустую линейную комбинацию. Заметим, однако, что в определении линейного подпространства мы на самом деле требовали, чтобы $L \neq \emptyset$.)

Пересечение любого семейства линейных подпространств в $\mathbb{R}^d$ вновь будет линейным подпространством в $\mathbb{R}^d$. Поэтому для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ существует наименьшее линейное подпространство, содержащее M , а именно, это будет пересечение всех линейных подпространств, содержащих M . Это подпространство называется линейным подпространством, натянутым на M , или порождённым M , или линейной оболочкой M ; оно обозначается $\text{span } M$.

Для линейной оболочки множества M может быть дано следующее описание:

(с) Для данного подмножества M в $\mathbb{R}^d$ его линейная оболочка $\text{span } M$ — это множество всех линейных комбинаций векторов из M .

(Заметим, что в силу нашего соглашения относительно пустой линейной комбинации верное утверждение $\text{span } \emptyset = \{0\}$ содержится в (с) как частный случай.)

Семейство $(x_1, \dots, x_n)$, состоящее из n векторов пространства $\mathbb{R}^d$, называется линейно-независимым, если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ имеет значение 0 лишь в случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Заметим, что пустое семейство (отвечающее случаю $n = 0$) линейно-независимо. Утверждение о линейной независимости данного семейства векторов равносильно утверждению, что ни один из этих векторов не является линейной комбинацией остальных. Если некоторый вектор x есть линейная комбинация векторов $x_1, \dots, x_n$, скажем $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, то коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ однозначно определены тогда и только тогда, когда семейство $(x_1, \dots, x_n)$ линейно-независимо. Семейства $(x_1, \dots, x_n)$, не являющиеся линейно-независимыми, называют линейно-зависимыми.

Линейный базис линейного подпространства L в $\mathbb{R}^d$ — это такое линейно-независимое семейство $(x_1, \dots, x_n)$ векторов из L , что $L = \text{span } \{x_1, \dots, x_n\}$. Размерностью $\dim L$ подпространства L называется наибольшее неотрицательное целое число n , такое что некоторое семейство из n векторов, принадлежащих L , линейно-независимо. Линейно-независимое семейство из n векторов подпространства L образует его базис тогда и только тогда, когда $n = \dim L$.

Пусть M — произвольное подмножество в $\mathbb{R}^d$ и n — размерность $\text{span } M$. Тогда существует линейно-независимое семейство $(x_1, \dots, x_n)$, состоящее из векторов, принадлежащих M , т.е. у $\text{span } M$ существует базис $(x_1, \dots, x_n)$, состоящий из векторов M . Поэтому:

(d) Для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ существует линейно-независимое семейство $(x_1, \dots, x_n)$ векторов из M , такое что $\text{span } M$ совпадает с множеством всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Это утверждение является уточнением утверждения (с). Оно показывает, что для того, чтобы получить $\text{span } M$, достаточно взять все линейные комбинации фиксированных векторов $x_1, \dots, x_n$ из M . Далее, каждый вектор из $\text{span } M$ допускает единственное представление в виде линейной комбинации $x_1, \dots, x_n$.

Отображение φ из некоторого линейного подпространства L пространства $\mathbb{R}^d$ в пространство $\mathbb{R}^e$ называется линейным, если оно сохраняет линейные комбинации, т.е.

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i).$$

Если φ линейно, то $\varphi(L)$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^e$. Линейные отображения непрерывны.

Взаимно-однозначное линейное отображение некоторого линейного подпространства L_1 пространства $\mathbb{R}^d$ на линейное подпространство L_2 пространства $\mathbb{R}^e$ называется (линейным) изоморфизмом. Если существует линейный изоморфизм L_1 на L_2 , то L_1 и L_2 называются изоморфными. Два линейных подпространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность. Каждый изоморфизм является также и гомеоморфизмом, т.е. сохраняет топологическую структуру.

Перейдём к обсуждению аффинной структуры $\mathbb{R}^d$. Аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$ — это либо пустое множество $\emptyset$, либо

сдвиг некоторого линейного подпространства, т. е. подмножество вида $A = x + L$, где $x \in \mathbb{R}^d$ и L — линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$. (Заметим, что L единственно, а x можно выбрать в A произвольным образом.) Под аффинным пространством мы понимаем аффинное подпространство некоторого пространства $\mathbb{R}^d$. Если A_1 и A_2 — аффинные подпространства в $\mathbb{R}^d$, причём $A_1 \subset A_2$, то мы будем также называть A_1 аффинным подпространством в A_2 . Элементы $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ аффинного подпространства A в $\mathbb{R}^d$ будем называть точками, в случае когда на первый план выдвигается аффинная, а не линейная структура. (Однако не всегда возможно и не всегда желательно проводить различие между точками и векторами.)

Множество A в $\mathbb{R}^d$ тогда и только тогда представляет собой аффинное подпространство, когда выполнено следующее требование:

(а') $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ принадлежит A для всех $x_1, x_2 \in A$ и всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Для любых двух различных точек x_1 и x_2 в $\mathbb{R}^d$ множество

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

называется прямой, проходящей через x_1 и x_2 . Таким образом, условие (а') означает, что прямая, проходящая через любую пару точек из A , содержится в A .

Аффинной комбинацией точек $x_1, \dots, x_n$ из $\mathbb{R}^d$ называется линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, где $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Чтобы отмечать тот факт, что линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ — аффинная, мы будем использовать обозначение

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

(Пустая линейная комбинация не является аффинной комбинацией. Поэтому в любой аффинной комбинации $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ всегда $n \geq 1$.) Условие (а') означает, что любая аффинная комбинация двух точек из A опять принадлежит A . Фактически (а') эквивалентно следующему условию:

(b') Любая аффинная комбинация точек A принадлежит A .

Пересечение любого семейства аффинных подпространств в $\mathbb{R}^d$ — снова аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$. (Здесь важно отметить, что $\emptyset$ — аффинное подпространство.) Поэтому для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ существует наименьшее аффинное подпространство, которое его содержит, а именно, это будет пересечение всех аффинных подпространств, содержащих M . Это аффинное подпространство называется аффинным подпространством, натянутым на M , или порождённым M , или аффинной оболочкой M , и обозначается $\text{aff } M$.

Аффинную оболочку данного подмножества M можно описать следующим образом:

(c') Для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ его аффинная оболочка $\text{aff } M$ совпадает с множеством всех аффинных комбинаций точек из M .

Семейство $(x_1, \dots, x_n)$ точек пространства $\mathbb{R}^d$ называется аффинно-независимым, если линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ с $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ равна θ лишь в случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. (В частности, пустое семейство, отвечающее $n = 0$, аффинно-независимо.) Утверждение об аффинной независимости данного семейства точек равносильно утверждению, что ни одна из этих точек не является аффинной комбинацией остальных. Если некоторая точка x представима в виде аффинной комбинации точек $x_1, \dots, x_n$, скажем $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, то коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ тогда и только тогда определены однозначно, когда семейство $(x_1, \dots, x_n)$ аффинно-независимо. Если семейство $(x_1, \dots, x_n)$ не является аффинно-независимым, то оно называется аффинно-зависимым.

Аффинная независимость семейства $(x_1, \dots, x_n)$ из n точек равносильна линейной независимости любого (каждого) из следующих семейств, состоящих из $n-1$ точек:

$$(x_1 - x_i, \dots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \dots, x_n - x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Аффинный базис аффинного пространства A — это такое аффинно-независимое семейство из n точек пространства A , что $A = \text{aff } \{x_1, \dots, x_n\}$. Размерность $\dim A$ непустого аффинного пространства A определяется как размерность линейного пространства L , для которого $A = x + L$. (Поскольку L

единственно, размерность $\dim A$ определена корректно. В случае когда A — линейное подпространство, аффинная и линейная размерности по определению совпадают, и поэтому можно использовать одно и то же обозначение.) Для $A = \emptyset$ мы полагаем $\dim A = -1$. Таким образом, размерность A равна $n-1$ тогда и только тогда, когда n — наибольшее неотрицательное целое, для которого существует аффинно-независимое семейство, состоящее из n точек множества A . Аффинно-независимое семейство из n точек множества A тогда и только тогда образует его аффинный базис, когда $n = \dim A + 1$.

Пусть M — произвольное подмножество $\mathbb{R}^d$, и пусть размерность $\text{aff } M$ равна $n-1$. Тогда существует аффинно-независимое семейство $(x_1, \dots, x_n)$, состоящее из точек множества M , т. е. существует аффинный базис $(x_1, \dots, x_n)$ для $\text{aff } M$, состоящий из точек M . Поэтому:

(d') Для каждого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ существует аффинно-независимое семейство $(x_1, \dots, x_n)$ точек этого подмножества, такое что $\text{aff } M$ совпадает с множеством всех аффинных комбинаций вида

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Это утверждение представляет собой уточнение утверждения (с'). Оно показывает, что для построения $\text{aff } M$ достаточно взять все аффинные комбинации фиксированных точек $x_1, \dots, x_n$ из M . Далее, произвольная точка из $\text{aff } M$ допускает единственное представление в виде аффинной комбинации $x_1, \dots, x_n$.

Нульмерные аффинные пространства — это одноточечные множества. Одномерные аффинные пространства называют прямыми. Если x_1 и x_2 — различные точки в $\mathbb{R}^d$, то двухточечное семейство $\{x_1, x_2\}$ аффинно-независимо. Поэтому $\text{aff } \{x_1, x_2\}$ одномерно, т. е. является прямой, и на самом деле это прямая, проходящая через x_1 и x_2 , в том смысле, как мы это понимали ранее в данном параграфе. Обратно, прямая в смысле ранее принятого определения, проходящая через две точки x_1 и x_2 , фактически является одномерным аффинным пространством, т. е. прямой.

Всякое $(n-1)$ -мерное аффинное подпространство n -мерного аффинного пространства A , где $n \geq 1$, называется гиперплоскостью в A . Если A - аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$, то гиперплоскости в A - это множества вида $H \cap A$, где H - гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, такая что $H \cap A$ - непустое собственное подмножество в A .

Отображение φ из аффинного подпространства A пространства $\mathbb{R}^d$ в пространство $\mathbb{R}^e$ называется аффинным, если оно сохраняет аффинные комбинации, т. е.

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i).$$

Если отображение φ аффинно, то $\varphi(A)$ - аффинное подпространство в $\mathbb{R}^e$. Для $A = x + L$, где L - линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$, отображение $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^e$ аффинно тогда и только тогда, когда существуют линейное отображение $\Phi: L \rightarrow \mathbb{R}^e$ и точка $y \in \mathbb{R}^e$, такие что при всех $z \in L$ выполнено равенство $\varphi(x+z) = y + \Phi(z)$. Аффинные отображения непрерывны.

Аффинные отображения $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$ называют аффинными функциями на A . Для каждой гиперплоскости H в A существует (непостоянная) аффинная функция φ на A , такая что $H = \varphi^{-1}(0)$. Обратно, $\varphi^{-1}(0)$ является гиперплоскостью в A для любой непостоянной аффинной функции φ на A . Равенство $\varphi^{-1}(0) = \psi^{-1}(0)$ для двух аффинных функций φ и ψ на A выполняется в том и только том случае, если $\varphi = \lambda \psi$ для некоторого ненулевого вещественного λ .

Пусть φ - непостоянная аффинная функция на аффинном пространстве A . Будем называть множества $\varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ и $\varphi^{-1}(]0, +\infty[)$ открытыми полупространствами, ограниченными гиперплоскостью $H = \varphi^{-1}(0)$, а множества $\varphi^{-1}(]-\infty, 0])$ и $\varphi^{-1}([0, +\infty[)$ - замкнутыми полупространствами, ограниченными гиперплоскостью H . Открытые полупространства представляют собой непустые открытые множества, замкнутые полупространства - непустые замкнутые множества. Пусть $H = \varphi^{-1}(0)$ - гиперплоскость в A . Будем говорить, что две точки из $A \setminus H$ находятся по одну сторону от H , если

они обе принадлежат $\varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ или же обе принадлежат $\varphi^{-1}(]0, +\infty[)$; в случае когда каждое из этих двух открытых полупространств содержит лишь по одной точке из нашей пары, говорят, что рассматриваемые точки лежат по разные стороны от H .

Полупрямая — это полупространство на прямой.

Пусть A — аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$ и K — замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^d$, такое что пересечение $A \cap K$ есть непустое собственное подмножество в A . Тогда $A \cap K$ будет замкнутым полупространством в A . Обратно, любое замкнутое полупространство в A может быть получено таким образом. То же самое относится и к открытым полупространствам.

Для $y \in \mathbb{R}^d$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$H(y, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}.$$

Заметим, что $H(\sigma, \alpha) = \mathbb{R}^d$ при $\alpha = 0$ и $H(\sigma, \alpha) = \emptyset$ при $\alpha \neq 0$. Из того факта, что аффинные функции на $\mathbb{R}^d$ — это в точности функции вида

$$x \mapsto \langle x, y \rangle - \alpha, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

следует, что гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$ — это в точности множества $H(y, \alpha)$ для $y \neq \sigma$. Для гиперплоскости $H(y, \alpha)$ вектор y (ненулевой!) называется нормалью к ней.

Далее, положим для $y \in \mathbb{R}^d$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$K(y, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \leq \alpha\}.$$

Заметим, что $K(\sigma, \alpha) = \mathbb{R}^d$ при $\alpha \geq 0$ и $K(\sigma, \alpha) = \emptyset$ при $\alpha < 0$. Для $y \neq \sigma$ множество $K(y, \alpha)$ представляет собой одно из двух замкнутых полупространств в $\mathbb{R}^d$, ограниченных $H(y, \alpha)$. Другим замкнутым полупространством, ограниченным $H(y, \alpha)$, будет $K(-y, -\alpha)$. Отметим, что

$$\text{bd} K(y, \alpha) = H(y, \alpha),$$

$$\text{int} K(y, \alpha) = K(y, \alpha) \setminus H(y, \alpha),$$

$$\text{cl}(\text{int} K(y, \alpha)) = K(y, \alpha),$$

если $y \neq \sigma$.

Взаимно-однозначное аффинное отображение аффинного пространства A_1 на аффинное пространство A_2 называется (аффинным) изоморфизмом. Если существует изоморфизм A_1 на A_2 , то

A_1 и A_2 называются (аффинно) изоморфными. Два аффинных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность. Любой изоморфизм является также и гомеоморфизмом, т. е. сохраняет топологическую структуру.

Из сказанного выше следует, что всякое d -мерное аффинное пространство A аффинно изоморфно конкретному d -мерному аффинному пространству $\mathbb{R}^d$. Иными словами, A можно "отождествить" с $\mathbb{R}^d$ — и не только в аффинном, но и в топологическом смысле. Подчеркнём, что при этом любая заданная точка A может быть "отождествлена" с любой заданной точкой $\mathbb{R}^d$.

В заключение отметим, что в этот параграф вошли не все сведения о линейной и аффинной структурах $\mathbb{R}^d$, которые нам потребуются ниже. Некоторая важная дополнительная информация содержится в упр. 1.1 — 1.5.

У п р а ж н е н и я

1.1. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — семейство из n точек в $\mathbb{R}^d$, где

$$x_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{di}), \quad i=1, \dots, n.$$

Положим

$$\bar{x}_i := (1, \alpha_{1i}, \dots, \alpha_{di}), \quad i=1, \dots, n.$$

Докажите, что семейство $(x_1, \dots, x_n)$ аффинно-независимо тогда и только тогда, когда линейно-независимо семейство $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ из n векторов пространства $\mathbb{R}^{d+1}$.

1.2. Докажите, что для произвольного подмножества M в $\mathbb{R}^d$

$$\dim(\text{aff } M) = \dim(\text{span } M),$$

если $0 \in \text{aff } M$, и

$$\dim(\text{aff } M) = \dim(\text{span } M) - 1,$$

если $0 \notin \text{aff } M$.

1.3. Пусть A — аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$ и H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$. Докажите, что

$$\dim(A \cap H) = \dim A - 1,$$

если $A \cap H \neq \emptyset$ и $A \not\subset H$.

1.4. Пусть $A_1 = x_1 + L_1$ и $A_2 = x_2 + L_2$ — непустые аффинные подпространства в $\mathbb{R}^d$. Говорят, что A_1 и A_2 параллельны, если $L_1 \subset L_2$ или $L_2 \subset L_1$, дополнительны (друг к другу), если дополнительные L_1 и L_2 , и ортогональны, если ортогональны L_1 и L_2 .

Докажите, что если A_1 и A_2 параллельны и $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, то либо $A_1 \subset A_2$, либо $A_2 \subset A_1$.

Докажите, что если A_1 и A_2 дополнительные, то $A_1 \cap A_2$ — одноточечное множество.

1.5. Пусть $A_1 = x_1 + L_1$ и $A_2 = x_2 + L_2$ — дополнительные аффинные подпространства в $\mathbb{R}^d$, и пусть x_0 — их единственная общая точка (см. упр. 1.4). Тогда $A_1 = x_0 + L_1$ и $A_2 = x_0 + L_2$. Пусть $\Pi: \mathbb{R}^d \rightarrow L_1$ обозначает проекцию в направлении L_2 . Для всякого $x \in \mathbb{R}^d$ положим $\pi(x) := x_0 + \Pi(x - x_0)$. Докажите, что $\pi(x)$ — это единственная общая точка A_1 и $(x - x_0) + A_2$. (Отображение π называется проекцией на A_1 в направлении A_2 . Если к тому же A_1 и A_2 ортогональны, то π называют ортогональной проекцией на A_1 .)

1.6. Говорят, что семейство $(x_1, \dots, x_n)$ из n точек пространства $\mathbb{R}^d$ находится в общем положении, если каждое его подсемейство $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ с $p \leq d+1$ аффинно-независимо. Проверьте, что семейство $(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда находится в общем положении, когда для любого k , удовлетворяющего условию $0 \leq k \leq d-1$, и любого k -мерного аффинного подпространства A в $\mathbb{R}^d$ число индексов i , таких что $x_i \in A$, не превышает $k+1$.

1.7. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — попарно различные точки в $\mathbb{R}^d$. Докажите, что существует такой вектор $w \neq 0$, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ гиперплоскость $H(w, \alpha)$ содержит не более одной из точек $x_1, \dots, x_n$.

§2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

В этом параграфе мы введём понятие выпуклого множества и докажем некоторые основные факты о таких множествах. В § 1 мы продемон-

стрировали полную аналогию между линейными и аффинными понятиями. Эта аналогия, хоть и не в полной мере, переносится на понятия теории выпуклости.

Подмножество C пространства $\mathbb{R}^d$ называется выпуклым, если $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ принадлежит C для всех $x_1, x_2 \in C$ и всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

Если x_1 и x_2 — различные точки в $\mathbb{R}^d$, то множество

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &:= \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} \\ &= \{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \mid \lambda \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

называют замкнутым интервалом (или отрезком), соединяющим эти точки. Аналогично определяются полуоткрытые интервалы $]x_1, x_2]$, $[x_1, x_2[$ и открытые интервалы $]x_1, x_2[$. Таким образом, множество C выпукло тогда и только тогда, когда отрезок, соединяющий любую пару его точек, содержится в нём.

Все аффинные подпространства в $\mathbb{R}^d$, включая само $\mathbb{R}^d$ и $\emptyset$, выпуклы. Любое (замкнутое или открытое) полупространство выпукло.

Образ выпуклого множества при аффинном отображении — снова выпуклое множество. В частности, выпуклы сдвиги выпуклых множеств.

Под выпуклой комбинацией точек $x_1, \dots, x_n$ из $\mathbb{R}^d$ понимается линейная комбинация вида $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, где $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$. Всякая выпуклая комбинация является также и аффинной. Чтобы отмечать, что данная линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ — выпуклая, мы будем употреблять обозначение

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Определение выпуклого множества выражает тот факт, что любая выпуклая комбинация двух его точек принадлежит ему. В действительности справедливо следующее более общее утверждение:

ТЕОРЕМА 2.1. Подмножество C в $\mathbb{R}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда каждая выпуклая комбинация его точек принадлежит ему.

Доказательство. Если любая выпуклая комбинация точек множества C принадлежит ему, то, в частности, принадлежит ему и любая выпуклая комбинация двух его точек. Значит, C выпукло.

Обратно, пусть C выпукло. Докажем индукцией по n , что каждая точка множества C , которая является линейной комбинацией n его точек, принадлежит ему. Для $n=1$ это очевидно, для $n=2$ вытекает из определения. Поэтому будем считать, что n не меньше 3, и допустим, что каждая выпуклая комбинация меньшего чем n числа точек из C принадлежит C . Рассмотрим произвольную выпуклую комбинацию

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

n точек $x_1, \dots, x_n$ множества C . Если $\lambda_i = 0$ для некоторого i , то x фактически является выпуклой комбинацией меньшего чем n числа точек из C и потому по предположению индукции принадлежит C . Если же $\lambda_i \neq 0$ для всех i , то $\lambda_i < 1$ для всех i , откуда, в частности, следует, что $1 - \lambda_1 > 0$. Поэтому можно написать

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \\ &= \lambda_1 x_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i \\ &= \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i. \end{aligned}$$

Здесь

$$y := \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i$$

— выпуклая комбинация, так как $\lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1 - \lambda_1$; сле-

довательно, y принадлежит C по предположению индукции. Но тогда $\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y$ принадлежит C в силу выпуклости этого множества, т. е. x принадлежит C . $\square$

Ясно, что пересечение любого семейства выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$ выпукло. Поэтому для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ существует наименьшее выпуклое множество, содержащее M , а именно, это будет пересечение всех выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, которые содержат M . Это выпуклое множество называется выпуклым множеством, натянутым на M , или порождённым M , или выпуклой оболочкой M ; оно обозначается $\text{conv } M$.

Очевидно, что $\text{conv}(x + M) = x + \text{conv } M$ для любой точки x и любого множества M . Более общо, из приводимой ниже теоремы 2.2 вытекает, что $\text{conv}(\varphi(M)) = \varphi(\text{conv } M)$ для любого аффинного отображения φ .

Выпуклую оболочку данного множества можно описать следующим образом:

ТЕОРЕМА 2.2. Для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ его выпуклая оболочка совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций его точек.

Доказательство. Пусть C обозначает множество всех выпуклых комбинаций точек M . Поскольку $M \subset \text{conv } M$, каждая точка $x \in C$ есть выпуклая комбинация точек выпуклого множества $\text{conv } M$; поэтому утверждение о необходимости из теоремы 2.1 дает $C \subset \text{conv } M$. Чтобы установить противоположное включение, достаточно проверить, что C — выпуклое множество, содержащее M . Так как точки $x \in M$ допускают тривиальное представление $x = 1x$ в виде выпуклой комбинации точек M , то $M \subset C$. Чтобы убедиться, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ принадлежит C для всех $x_1, x_2 \in C$ и всех $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, удовлетворяющих условию $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, заметим, что по определению x_1 и x_2 являются выпуклыми комбинациями точек из M , скажем

$$x_1 = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i, \quad x_2 = \sum_{i=n+1}^m \mu_i y_i.$$

Но тогда

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_1 \mu_i y_i + \sum_{i=n+1}^m \lambda_2 \mu_i y_i$$

и

$$\lambda_1 \mu_i \geq 0, \lambda_2 \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_1 \mu_i + \sum_{i=n+1}^m \lambda_2 \mu_i = 1.$$

Это показывает, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ — выпуклая комбинация точек $y_1, \dots, y_m$ из M , а значит, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ принадлежит M , что и требовалось доказать. $\square$

До сих пор всё шло в полной аналогии с § 1. Однако понятие базиса линейного или аффинного подпространства уже не имеет в общем случае аналога для выпуклых множеств. Некоторым заменителем утверждения о существовании базиса может служить следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2.3. Для каждого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ его выпуклая оболочка $\text{conv } M$ совпадает с множеством всех тех выпуклых комбинаций

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,$$

в которых $(x_1, \dots, x_n)$ — аффинно-независимые семейства точек из M .

Другими словами, для того чтобы образовать выпуклую оболочку $\text{conv } M$, не обязательно брать все выпуклые комбинации точек из M , как это говорится в теореме 2.2; достаточно рассмотреть лишь те из них, которые отвечают аффинно-независимым системам точек из M . С другой стороны, в общем случае ни одного фиксированного семейства точек из M не хватит, как это видно на примерах $\text{span } M$ или $\text{aff } M$ (ср. с утверждениями (d) и (d') § 1).

Доказательство. Покажем, что если точка x — выпуклая комбинация n точек $x_1, \dots, x_n$, таких что $(x_1, \dots, x_n)$ аффинно-зависимо, то x будет выпуклой комбинацией $n-1$ из

точек $x_1, \dots, x_n$. Повторно применяя, если нужно, этот факт, мы получим, что существует аффинно-независимое подсемейство $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ семейства $(x_1, \dots, x_n)$, такое что x — выпуклая комбинация точек $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$. Тогда доказываемое утверждение будет следовать из теоремы 2.2.

Итак, допустим, что

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad (1)$$

где семейство $(x_1, \dots, x_n)$ аффинно-зависимо. Если некоторое λ_i равно 0, то x уже является выпуклой комбинацией $n-1$ точек из $x_1, \dots, x_n$. Значит, можно считать, что все λ_i положительны. Аффинная зависимость нашего семейства означает, что существуют вещественные числа $\mu_1, \dots, \mu_n$, не все равные 0 и такие, что

$$\sum_{i=1}^n \mu_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \mu_i = 0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что для любого вещественного

$$x = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - t\mu_i) x_i \quad (3)$$

и

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - t\mu_i) = 1.$$

Теперь мы просто подберём такое значение t (фактически оно будет положительным), для которого $\lambda_i - t\mu_i \geq 0$ при всех i и $\lambda_i - t\mu_i = 0$ по крайней мере для одного i ; тогда (3) станет представлением x в виде выпуклой комбинации $n-1$ из точек $x_1, \dots, x_n$. Если $\mu_i \leq 0$, то $\lambda_i - t\mu_i > 0$ для всех $t > 0$. Если $\mu_i > 0$, то $\lambda_i - t\mu_i \geq 0$ при условии, что $t \leq \lambda_i / \mu_i$, причём $\lambda_i - t\mu_i = 0$ тогда и только тогда, когда $t = \lambda_i / \mu_i$. Замечая, что по крайней мере для одного i обязательно $\mu_i > 0$, мы видим, что годится

$$t := \min \{ \lambda_i / \mu_i \mid \mu_i > 0 \}. \square$$

Два приводимых ниже следствия известны как теорема Каратеодори.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ с $\dim(\text{aff } M) = n$ его выпуклая оболочка $\text{conv } M$ совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций не более чем $n+1$ точек из M .

Доказательство. По предположению, для любого аффинно-независимого семейства $(x_1, \dots, x_m)$ из m точек, принадлежащих M , мы имеем $m \leq n+1$. Поэтому, в силу теоремы 2.3, множество всех выпуклых комбинаций $n+1$ или меньшего числа точек, принадлежащих M , содержит $\text{conv } M$. С другой стороны, в силу теоремы 2.2 оно само содержится в $\text{conv } M$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$ с $\dim(\text{aff } M) = n$ его выпуклая оболочка совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций в точности $n+1$ точек из M .

Доказательство. В любую выпуклую комбинацию всегда можно добавлять слагаемые вида $0x$. Поэтому наше утверждение вытекает из следствия 2.4. $\square$

Под выпуклым многогранником (или, для краткости, просто многогранником) мы будем понимать выпуклую оболочку непустого конечного множества $\{x_1, \dots, x_n\}$. Если P — многогранник, то и любой его сдвиг $x + P$ — также многогранник; это следует из того, что $x + \text{conv } M = \text{conv } (x + M)$. Более общо, образ многогранника при любом аффинном отображении — опять многогранник; это следует из того факта, что $\varphi(\text{conv } M) = \text{conv } \varphi(M)$, если φ — аффинное отображение.

Многогранник S , обладающий тем свойством, что существует аффинно-независимое семейство $(x_1, \dots, x_n)$, для которого $S = \text{conv } \{x_1, \dots, x_n\}$, называется симплексом (а точки $x_1, \dots, x_n$ — его вершинами; см. также абзац после теоремы 7.1).

Можно было бы сказать, что симплексы обладают "выпуклым базисом" (см. замечание перед теоремой 2.3). В самом деле, если $x_1, \dots, x_n$ — вершины симплекса S , то в силу их аффинной независимости каждая точка из $\text{aff}\{x_1, \dots, x_n\}$ допускает единственное представление в виде аффинной комбинации точек $x_1, \dots, x_n$, откуда, в частности, следует, что каждая точка из $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ допускает единственное представление в виде выпуклой комбинации $x_1, \dots, x_n$ (см. теорему 2.3).

Выпуклые множества, обладающие "выпуклым базисом" в указанном выше смысле, конечно, должны быть многогранниками. Следующая теорема показывает, что симплексы — это единственные многогранники, имеющие "выпуклый базис".

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное множество в $\mathbb{R}^d$, такое что семейство $(x_1, \dots, x_n)$ аффинно-зависимо. Тогда в M найдутся такие подмножества M_1 и M_2 , удовлетворяющие условиям $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ и $M_1 \cup M_2 = M$, что

$$\text{conv} M_1 \cap \text{conv} M_2 \neq \emptyset.$$

Доказательство. В силу аффинной зависимости семейства $(x_1, \dots, x_n)$ существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, не все равные 0, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0. \quad (4)$$

Обозначим множество $\{1, \dots, n\}$ через I и положим

$$I_1 := \{i \in I \mid \lambda_i > 0\}, \quad I_2 := \{i \in I \mid \lambda_i \leq 0\},$$

$$M_1 := \{x_i \mid i \in I_1\}, \quad M_2 := \{x_i \mid i \in I_2\}.$$

Далее, положим

$$x := \sum_{i \in I_1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i, \quad (5)$$

где

$$\lambda := \sum_{i \in I_1} \lambda_i$$

(ясно, что $I_1 \neq \emptyset$, а значит, $\lambda > 0$). Правая часть (5) фактически представляет собой выпуклую комбинацию, и поэтому, в силу теоремы 2.2, x принадлежит $\text{conv } M_1$. С другой стороны, используя (4), мы заключаем, что x можно записать также в виде

$$x = \sum_{i \in I_2} \frac{-\lambda_i}{\lambda} x_i,$$

и мы опять имеем выпуклую комбинацию. Поэтому x принадлежит и $\text{conv } M_2$. Следовательно, $\text{conv } M_1$ и $\text{conv } M_2$ имеют x общей точкой. $\square$

Следующее предложение, вытекающее из теоремы 2.6, известно как теорема Радона:

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное множество из n точек в $\mathbb{R}^d$, такое что $n \geq d+2$. Тогда в M существуют такие подмножества M_1 и M_2 , что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = M$ и

$$\text{conv } M_1 \cap \text{conv } M_2 \neq \emptyset.$$

Доказательство. Максимальное число элементов в аффинно-независимом семействе точек пространства $\mathbb{R}^d$ равно $d+1$. Поэтому семейство $(x_1, \dots, x_n)$ аффинно-зависимо, и можно применить теорему 2.6. $\square$

Мы завершим этот параграф одним важным приложением теоремы Каратеодори.

ТЕОРЕМА 2.8. Для любого компактного подмножества M в $\mathbb{R}^d$ его выпуклая оболочка $\text{conv } M$ компактна.

Доказательство. Пусть $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ — произвольная последовательность точек из $\text{conv } M$. Покажем, что из неё можно

выделить подпоследовательность, которая сходится к некоторой точке из $\text{conv } M$. Пусть n обозначает размерность $\text{aff } M$. Тогда следствие 2.5 показывает, что каждый элемент y_ν из рассматриваемой последовательности допускает представление в виде

$$y_\nu = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{\nu i} x_{\nu i},$$

где $x_{\nu i} \in M$. Теперь рассмотрим $n+1$ последовательностей

$$(x_{\nu 1})_{\nu \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{\nu(n+1)})_{\nu \in \mathbb{N}} \quad (6)$$

точек из M и $n+1$ последовательностей

$$(\lambda_{\nu 1})_{\nu \in \mathbb{N}}, \dots, (\lambda_{\nu(n+1)})_{\nu \in \mathbb{N}} \quad (7)$$

вещественных чисел из отрезка $[0, 1]$. В силу компактности M у последовательности $(x_{\nu 1})_{\nu \in \mathbb{N}}$ существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке из M . Заменяем все $2(n+1)$ последовательностей на соответствующие подпоследовательности. Изменим и обозначения: пусть теперь (6) и (7) обозначают эти подпоследовательности; тогда $(x_{\nu 1})_{\nu \in \mathbb{N}}$ сходится в M . Далее, вновь используя компактность M , заключаем что у (под)последовательности $(x_{\nu 2})_{\nu \in \mathbb{N}}$ существует подпоследовательность, которая сходится к некоторой точке из M . Снова изменим обозначения, и т. д. После $2(n+1)$ шагов (на шагах $1, \dots, \dots, n+1$ используется компактность M , а на шагах $n+2, \dots, \dots, 2n+2$ — компактность $[0, 1]$) мы придём к подпоследовательностям

$$(x_{\nu_m 1})_{m \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{\nu_m(n+1)})_{m \in \mathbb{N}}$$

исходных последовательностей (6), сходящимся в M :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{\nu_m i} = x_{0i}, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

и к подпоследовательностям

$$(\lambda_{\nu m 1})_{m \in \mathbb{N}}, \dots, (\lambda_{\nu m (n+1)})_{m \in \mathbb{N}}$$

исходных последовательностей (7), сходящимся в $[0, 1]$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\nu m i} = \lambda_{0i}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{\nu m i} = 1, \quad m \in \mathbb{N},$$

мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{0i} = 1.$$

Следовательно, линейная комбинация

$$y_0 := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{0i} x_{0i}$$

является выпуклой комбинацией. Поэтому, в силу теоремы 2.2, y_0 принадлежит $\text{conv } M$. Ясно также, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_{\nu m} = y_0.$$

Итак, $(y_{\nu m})_{m \in \mathbb{N}}$ представляет собой подпоследовательность последовательности $(y_{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к некоторой точке из $\text{conv } M$. $\square$

Возможно, некоторым читателям больше понравится следующий вариант доказательства. Пусть, как и выше, $n = \dim(\text{aff } M)$, и пусть

$$S := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1\}.$$

Определим отображение $\varphi: M^{n+1} \times S \rightarrow \mathbb{R}^d$ равенством

$$\varphi((x_1, \dots, x_{n+1}), (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})) := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

В силу следствия 2.5 множество $\varphi(M^{n+1} \times S)$ в точности совпадает с $\text{conv } M$. Но произведение $M^{n+1} \times S$ компактно (так как компактны M и S), а φ — непрерывное отображение. Поскольку непрерывный образ компакта — компакт, мы заключаем, что $\text{conv } M$ — компакт.

Так как любое конечное множество компактно, из теоремы 2.8 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Любой выпуклый многогранник P в $\mathbb{R}^d$ — компакт.

Стоит заметить, что это следствие нетрудно доказать и непосредственно, без привлечения теоремы Каратеодори. В самом деле, пусть M — конечное множество точек $\{x_1, \dots, x_m\}$. Каждая точка y_ν (мы используем обозначения из доказательства теоремы 2.8) допускает представление в виде

$$y_\nu = \sum_{i=1}^m \lambda_{\nu i} x_i.$$

Теперь мы находимся в том же положении, что и в проведенном выше доказательстве (с m вместо $n+1$), с той, однако, разницей, что теперь последовательности, соответствующие последовательностям (6), постоянны: $x_{\nu i} = x_i$ для всех ν . Поэтому остаётся только показать, что последовательности (7) содержат сходящиеся подпоследовательности, а это делается так же, как и выше.

У п р а ж н е н и я

2.1. Докажите, что если C_1 и C_2 — выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$, то множество

$$C_1 + C_2 := \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$$

тоже выпукло.

2.2. Докажите, что если C — выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$, а λ — произвольное вещественное число, то множество

$$\lambda C := \{\lambda x \mid x \in C\}$$

тоже выпукло.

- 2.3. Докажите, что если C — выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$, а $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ — аффинное отображение, то $\varphi(C)$ — также выпуклое множество.
- 2.4. Докажите, что $\text{conv}(M_1 + M_2) = \text{conv} M_1 + \text{conv} M_2$ для любых подмножеств M_1 и M_2 в $\mathbb{R}^d$.
- 2.5. Пусть M — произвольное подмножество в $\mathbb{R}^d$, а $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ — аффинное отображение. Докажите, что $\varphi(\text{conv} M) = \text{conv} \varphi(M)$. Выведите отсюда, что аффинный образ многогранника является многогранником.
- 2.6. Докажите, что если M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^d$, то $\text{conv} M$ — также открытое подмножество. Используя этот факт, покажите, что внутренность выпуклого множества выпукла. (См. утверждение (b) теоремы 3.4.)
- 2.7. Постройте пример в $\mathbb{R}^2$, показывающий, что выпуклая оболочка замкнутого множества не обязана быть замкнутой. (См. теорему 2.8.)
- 2.8. Семейство $(x_1, \dots, x_n)$ из n точек в $\mathbb{R}^d$ называется выпукло-независимым, если ни одна из точек этого семейства не является выпуклой комбинацией остальных x_j . Пусть $n \geq d+2$. Докажите, что если каждое подсемейство семейства $(x_1, \dots, x_n)$, состоящее из $d+2$ точек, выпукло-независимо, то и всё это семейство выпукло-независимо.
- 2.9. Пусть $(C_i)_{i \in I}$ — семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, причём $d+1 \leq \text{card } I$. Рассмотрим следующие утверждения:
- (a) любые $d+1$ из множеств C_i имеют непустое пересечение;
 - (b) все множества C_i имеют непустое пересечение.

Докажите теорему Хелли: если $\text{card } I < \infty$, то (a) $\Rightarrow$ (b).

[Указание: проведите индукцию по $n := \text{card } I$; примените следствие 2.7.]

Покажите на примере, что в случае $\text{card } I = \infty$ импликация (a) $\Rightarrow$ (b) уже неверна.

Докажите, что если все множества C_i замкнуты и хотя бы одно из них компактно, то импликация (a) $\Rightarrow$ (b) справедлива и без ограничения на $\text{card } I$.

2.10. Пусть некоторая точка x в $\mathbb{R}^d$ является выпуклой комбинацией точек $x_1, \dots, x_n$, а каждая из x_i — выпуклой комбинацией точек $y_{i1}, \dots, y_{in_i}$. Докажите, что x — выпуклая комбинация точек $y_{i\nu_i}$, $i=1, \dots, n$, $\nu_i=1, \dots, n_i$.

2.11. Пусть $(C_i)_{i \in I}$ — семейство попарно различных выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$. Докажите, что

$$\operatorname{conv} \bigcup_{i \in I} C_i$$

совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций вида

$$\sum_{\nu=1}^n \lambda_{i\nu} x_{i\nu},$$

где $x_{i\nu} \in C_{i\nu}$.

Выведите отсюда, что если C_1 и C_2 — выпуклые множества, то $\operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)$ совпадает с объединением всех отрезков $[x_1, x_2]$, где $x_1 \in C_1$ и $x_2 \in C_2$.

§3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВНУТРЕННОСТЬ ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

Ясно, что внутренность выпуклого множества может быть пустой. Например, треугольник в $\mathbb{R}^3$ не имеет внутренних точек. Однако он всё же имеет внутренние точки в двумерном аффинном пространстве, которое на него натянуто. Это наблюдение помогает понять даваемое ниже определение относительной внутренности выпуклого множества, а также главный результат настоящего параграфа — теорему 3.1. Кроме того, мы обсудим здесь, как ведут себя выпуклые множества по отношению к операциям взятия (относительной) внутренности, замыкания и границы.

Под относительной внутренностью выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$ понимается внутренность C в аффинной оболочке $\operatorname{aff} C$ этого множества. Относительная внутренность C обозначается $\operatorname{ri} C$. Точки, лежащие в $\operatorname{ri} C$, называют относительно-внутренними точками C . Множество $\operatorname{cl} C \setminus \operatorname{ri} C$ называется относительной границей C и обозначается $\operatorname{rb} C$. Точки, лежащие в $\operatorname{rb} C$, называют относительно-граничными точками C . (Так как $\operatorname{aff} C$ —

замкнутое множество в $\mathbb{R}^d$, то "относительное замыкание" C — это просто замыкание C . Поэтому относительная граница C на самом деле совпадает с границей C в $\text{aff } C$.)

Следует заметить, что было бы заблуждением думать, что операция ri — это просто незначительная модификация операции int . Пожалуй, наиболее показательным является тот факт, что операция ri не сохраняет включений. Например, пусть C_1 — сторона некоторого треугольника C_2 . Тогда $C_1 \subset C_2$, в то время как $\text{ri } C_1 \not\subset \text{ri } C_2$; в самом деле, $\text{ri } C_1$ и $\text{ri } C_2$ — непустые непересекающиеся множества.

Под размерностью выпуклого множества C понимается размерность $\dim(\text{aff } C)$ его аффинной оболочки; она обозначается $\dim C$. Пустое множество имеет размерность -1 . Нульмерные выпуклые множества — это одноточечные множества $\{x\}$. Одномерные выпуклые множества — это интервалы (замкнутые, полуоткрытые или открытые), полупрямые (замкнутые или открытые) и прямые.

Очевидно, что для нульмерного выпуклого множества $C = \{x\}$ мы имеем $\text{ri } C = C$, $\text{cl } C = C$ и $\text{rb } C = \emptyset$.

Для непустого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$ равенство $\text{ri } C = \text{int } C$ выполнено тогда и только тогда, когда $\text{int } C \neq \emptyset$. В самом деле, если $\text{int } C \neq \emptyset$, то $\text{aff } C = \mathbb{R}^d$, а значит, $\text{ri } C = \text{int } C$ по определению $\text{ri } C$. Обратное утверждение вытекает из следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть C — непустое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\text{ri } C \neq \emptyset$.

Сначала мы докажем эту теорему для симплексов:

ЛЕММА 3.2. Пусть S — симплекс в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\text{ri } S \neq \emptyset$.

Доказательство. Если $\dim S = k$, то найдётся аффинно-независимое семейство $(x_1, \dots, x_{k+1})$ из $k+1$ точек, такое что

$$S = \text{conv} \{x_1, \dots, x_{k+1}\}.$$

Тогда $(x_1, \dots, x_{k+1})$ — аффинный базис для $\text{aff } S$; следовательно, $\text{aff } S$ представляет собой множество точек вида

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i,$$

причём для каждой точки $x \in \text{aff } S$ коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ определены однозначно. Поэтому можно определить отображение

$$\varphi: \text{aff } S \rightarrow \mathbb{R}^{k+1},$$

положив

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) := (\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}).$$

Ясно, что это отображение аффинное и, следовательно, непрерывно. Пусть

$$K_i := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \lambda_i > 0\}, \quad i = 1, \dots, k+1.$$

Множество $K_1, \dots, K_{k+1}$ представляют собой открытые полупространства в $\mathbb{R}^{k+1}$, и, значит, в силу непрерывности φ , множества $\varphi^{-1}(K_1), \dots, \varphi^{-1}(K_{k+1})$ суть открытые множества (а фактически открытые полупространства) в $\text{aff } S$. Поэтому множество

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} \varphi^{-1}(K_i) \tag{1}$$

также открыто в $\text{aff } S$. Теперь заметим, что

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} \varphi^{-1}(K_i) = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} > 0 \right\}.$$

Отсюда, в частности, видно, что множество (1) непусто. А поскольку аффинные комбинации $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}$ с положительными λ_i — это выпуклые комбинации, мы видим, что множество (1) — подмножество S . Другими словами, S содержит непустое множество, открытое в $\text{aff } S$, и поэтому $\text{ri } S \neq \emptyset$. (Из проведённого доказательства следует, что множество

(I) – подмножество в $\text{ri } S$. Фактически эти два множества совпадают.) $\square$

Теперь, имея в распоряжении лемму 3.2, мы можем доказать теорему 3.1 и для общего случая.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть

$$k := \dim C \quad (= \dim(\text{aff } C)).$$

Тогда существует аффинно-независимое семейство $(x_1, \dots, x_{k+1})$ из $k+1$ точек множества C (но нет таких семейств, состоящих из $k+2$ точек.) Положим

$$S := \text{conv} \{x_1, \dots, x_{k+1}\}.$$

Это симплекс, содержащийся в C . Согласно лемме 3.2, S обладает непустой внутреннейностью относительно $\text{aff } S$. Поскольку

$$\text{aff } S \subset \text{aff } C$$

и

$$\dim(\text{aff } S) = k = \dim(\text{aff } C),$$

то на самом деле

$$\text{aff } S = \text{aff } C.$$

Значит, S имеет непустую внутренность относительно $\text{aff } C$. Но так как S – подмножество C , отсюда следует, что и C имеет непустую внутренность относительно $\text{aff } C$, а это и надо было доказать. $\square$

Следующая теорема показывает, что любую точку замыкания выпуклого множества C можно "увидеть" из любой относительно-внутренней точки C "через слой" относительно-внутренних точек.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть C – выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Тогда для любых не совпадающих друг с другом точек $x_0 \in \text{ri } C$ и $x_1 \in \text{cl } C$ справедливо включение $[x_0, x_1] \subset \text{ri } C$.

Доказательство. Это утверждение легко устанавливается в том частном случае, когда $x_0 \in \text{int } C$ и $x_1 \in C$. Для $\lambda \in]0, 1[$ положим $x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$. Посколь-

ку $x_0 \in \text{int } C$, найдётся такой шар B с центром в x_0 , что $B \subset C$. Тогда из условия $x_1 \in C$ и выпуклости C вытекает, что

$$B_\lambda := (1-\lambda)B + \lambda x_1$$

содержится в C . Но B_λ — шар с центром в точке x_λ , откуда и следует, что $x_\lambda \in \text{int } C$. Приводимое ниже доказательство для общего случая представляет собой разработку той же идеи. Конечно, главная трудность состоит в том, что точка x_1 не обязана принадлежать множеству C .

Итак, рассмотрим точки $x_0 \in \text{ri } C$ и $x_1 \in \text{cl } C$, $x_0 \neq x_1$. Для каждого $\lambda \in]0, 1[$ положим

$$x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1.$$

Нам надо показать, что $x_\lambda \in \text{ri } C$. Так как x_0 — точка из относительной внутреннейности C , то существует (относительно-)открытое подмножество U в $\text{aff } C$, такое что $x_0 \in U \subset C$. Положим

$$V := \lambda^{-1}(x_\lambda - (1-\lambda)U).$$

Так как

$$\lambda^{-1} - \lambda^{-1}(1-\lambda) = 1,$$

то V — подмножество в $\text{aff } C$, и притом (относительно-)открытое. А поскольку

$$x_1 = \lambda^{-1}(x_\lambda - (1-\lambda)x_0),$$

мы видим, что $x_1 \in V$. Поэтому, в силу предположения $x_1 \in \text{cl } C$, существует точка $y_1 \in V \cap C$. Пусть

$$W := (1-\lambda)U + \lambda y_1.$$

Ясно, что W — (относительно-)открытое подмножество в $\text{aff } C$, и так как $U \subset C$ и $y_1 \in C$, то в силу выпуклости C выполнено включение $W \subset C$. Осталось проверить, что $x_\lambda \in W$. Из определения V вытекает, что существует такая точка $y_0 \in U$, что

$$y_1 = \lambda^{-1}(x_\lambda - (1-\lambda)y_0).$$

Следовательно,

$$x_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \in (1-\lambda)U + \lambda y_1 = W,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 3.3 – полезный рабочий инструмент. Помимо всего прочего, она играет решающую роль при доказательстве всех утверждений нашей следующей теоремы (за исключением утверждения (а)). Эта теорема описывает некоторые "хорошие" свойства выпуклых множеств.

ТЕОРЕМА 3.4. Для всякого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$

- (a) $\text{cl } C$ выпукло;
- (b) $\text{ri } C$ выпукла;
- (c) $\text{cl } C = \text{cl}(\text{cl } C) = \text{cl}(\text{ri } C)$;
- (d) $\text{ri } C = \text{ri}(\text{cl } C) = \text{ri}(\text{ri } C)$;
- (e) $\text{rb } C = \text{rb}(\text{cl } C) = \text{rb}(\text{ri } C)$;
- (f) $\text{aff } C = \text{aff}(\text{cl } C) = \text{aff}(\text{ri } C)$;
- (g) $\dim C = \dim(\text{cl } C) = \dim(\text{ri } C)$.

Доказательство. Если $C = \emptyset$, то доказывать нечего. Поэтому мы можем считать, что C непусто.

(a) Пусть $x_0, x_1 \in \text{cl } C$ и $\lambda \in]0, 1[$. Докажем, что точка

$$x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$$

также принадлежит $\text{cl } C$. В самом деле, существуют последовательности

$$(x_{0\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}, \quad (x_{1\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$$

точек из C , такие что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{0\nu} = x_0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{1\nu} = x_1.$$

В силу выпуклости C все точки

$$(1-\lambda)x_{0\nu} + \lambda x_{1\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

принадлежат C . Далее,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} ((1-\lambda)x_{0\nu} + \lambda x_{1\nu}) = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 = x_\lambda.$$

Это показывает, что $x_\lambda \in \text{cl } C$.

(b) Надо доказать, что для всех точек $x_0, x_1 \in \text{ri } C$ и для любого $\lambda \in]0, 1[$ точка

$$x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$$

также принадлежит $\text{ri } C$. Но это немедленно следует из теоремы 3.3.

(c) Утверждение $\text{cl } C = \text{cl}(\text{cl } C)$ очевидно. Ясно также, что $\text{cl}(\text{ri } C) \subset \text{cl } C$. Установим обратное включение. Пусть $x_1 \in \text{cl } C$. Возьмём любую точку $x_0 \in \text{ri } C$ (см. теорему 3.1). Если $x_0 = x_1$, то

$$x_1 \in \text{ri } C \subset \text{cl}(\text{ri } C),$$

как и требуется. Если же $x_0 \neq x_1$, то

$$[x_0, x_1[\subset \text{ri } C$$

(см. теорему 3.3). Так как в любой окрестности x_1 есть точки из $[x_0, x_1[$, отсюда следует, что x_1 принадлежит $\text{cl}(\text{ri } C)$.

(d) Чтобы доказать, что $\text{ri } C = \text{ri}(\text{cl } C)$, заметим прежде всего, что

$$\text{aff } C = \text{aff}(\text{cl } C), \quad (2)$$

так как множество $\text{aff } C$ замкнуто. Отсюда ясно, что $\text{ri } C \subset \text{ri}(\text{cl } C)$. Докажем обратное включение. Пусть x — точка из $\text{ri}(\text{cl } C)$. Возьмём произвольную точку $x_0 \in \text{ri } C$ (см. теорему 3.1). Если $x_0 = x$, то $x \in \text{ri } C$, как нам и надо. Если же $x_0 \neq x$, то $\text{aff } \{x_0, x\}$ — прямая и

$$\text{aff } \{x_0, x\} \subset \text{aff}(\text{cl } C) = \text{aff } C.$$

Так как $x \in \text{ri}(\text{cl } C)$, найдётся такая точка $x_1 \in \text{aff } \{x_0, x\}$, что $x_1 \in \text{cl } C$ и $x \in]x_0, x_1[$. Применяя теорему 3.3, заключаем, что $x \in \text{ri } C$. Поэтому $\text{ri } C = \text{ri}(\text{cl } C)$.

Чтобы доказать, что $\text{ri } C = \text{ri}(\text{ri } C)$, установим сначала, что

$$\text{aff } C = \text{aff}(\text{ri } C). \quad (3)$$

Действительно, применяя (2) к $\text{ri } C$ вместо C и используя (c), получаем

$$\begin{aligned}\text{aff}(\text{ri } C) &= \text{aff}(\text{cl}(\text{ri } C)) \\ &= \text{aff}(\text{cl } C) = \text{aff } C.\end{aligned}$$

Вводя теперь для $\text{ri } C$ обозначение $\text{int}_{\text{aff } C} C$, имеем

$$\begin{aligned}\text{ri}(\text{ri } C) &= \text{int}_{\text{aff}(\text{ri } C)}(\text{ri } C) \\ &= \text{int}_{\text{aff } C}(\text{ri } C)\end{aligned}$$

(мы воспользовались соотношением (3)). Но

$$\begin{aligned}\text{int}_{\text{aff } C}(\text{ri } C) &= \text{int}_{\text{aff } C}(\text{int}_{\text{aff } C} C) \\ &= \text{int}_{\text{aff } C} C = \text{ri } C\end{aligned}$$

(мы использовали тот стандартный факт, что $\text{int}(\text{int } M) = \text{int } M$ для произвольного множества M). Тем самым доказательство утверждения (d) завершено.

(e) По определению,

$$\begin{aligned}\text{rb } C &= \text{cl } C \setminus \text{ri } C, \\ \text{rb}(\text{cl } C) &= \text{cl}(\text{cl } C) \setminus \text{ri}(\text{cl } C), \\ \text{rb}(\text{ri } C) &= \text{cl}(\text{ri } C) \setminus \text{ri}(\text{ri } C).\end{aligned}$$

Поэтому наше утверждение вытекает из (c) и (d).

(f) Это утверждение нами уже доказано (см. (2) и (3)).

(g) Это следует из (f). $\square$

Следующий наш результат также опирается на теорему 3.3. Он показывает, что точки из относительной внутренности выпуклого множества C могут быть охарактеризованы в чисто алгебраических терминах:

ТЕОРЕМА 3.5. Для любого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$ и любой точки $x \in C$ следующие три условия равносильны:

- (a) $x \in \text{ri } C$;
- (b) для каждой прямой A в $\text{aff } C$, проходящей через $x \in A$, найдутся точки $y_0, y_1 \in A \cap C$, такие что $x \in]y_0, y_1[$;
- (c) для каждой точки $y \in C$, отличной от x , найдётся та-

кая точка $z \in C$, что $x \in]y, z[$, т. е. любой отрезок $[y, x]$ в C может быть продлён за x в C .

Доказательство. Импликации (a) $\Rightarrow$ (b) и (b) $\Rightarrow$ (c) очевидны. Поэтому достаточно доказать, что (c) $\Rightarrow$ (a). В силу теоремы 3.1 найдётся точка $y \in \text{ri } C$. Если $y = x$, доказывать нечего. Если же $y \neq x$, то в силу (c) существует такая точка $z \in C$, что $x \in]y, z[$. Но тогда по теореме 3.3 точка x принадлежит $\text{ri } C$. $\square$

В заключение этого параграфа дадим одно приложение утверждения (a) теоремы 3.4. Пусть M — произвольное множество в $\mathbb{R}^d$. Существует наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее M . Назовем его замкнутой выпуклой оболочкой множества M и обозначим $\text{clconv } M$. Как и можно было ожидать, справедлив следующий результат:

ТЕОРЕМА 3.6. Для любого множества M в $\mathbb{R}^d$

$$\text{clconv } M = \text{cl}(\text{conv } M),$$

т. е. замкнутая выпуклая оболочка множества совпадает с замыканием его выпуклой оболочки.

Доказательство. В силу утверждения (a) теоремы 3.4, $\text{cl}(\text{conv } M)$ — замкнутое выпуклое множество, содержащее M . Так как $\text{clconv } M$ — наименьшее из таких множеств, то

$$\text{clconv } M \subset \text{cl}(\text{conv } M).$$

С другой стороны, $\text{clconv } M$ — выпуклое множество, содержащее M , и поэтому

$$\text{clconv } M \supset \text{conv } M.$$

Так как $\text{clconv } M$ — также и замкнутое множество, отсюда следует, что

$$\text{clconv } M \supset \text{cl}(\text{conv } M),$$

чем доказательство и завершено.

У п р а ж н е н и я

- 3.1. Пусть $P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\}$ — многогранник в $\mathbb{R}^d$. Покажите, что точка x тогда и только тогда лежит в $\text{ri } P$, когда она является выпуклой комбинацией точек $x_1, \dots, x_n$ со стороны положительными коэффициентами, т. е. когда найдутся такие $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $\lambda_i > 0$ для $i = 1, \dots, n$ и

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

- 3.2. Пусть C_1 и C_2 — выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$. Докажите, что

$$\text{ri}(C_1 + C_2) = \text{ri } C_1 + \text{ri } C_2.$$

- 3.3. Пусть C — выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$ и $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ — аффинное отображение. Докажите, что

$$\text{ri } \varphi(C) = \varphi(\text{ri } C).$$

- 3.4. Пусть $(C_i)_{i \in I}$ — семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, такое что

$$\bigcap_{i \in I} \text{ri } C_i \neq \emptyset. \quad (4)$$

Докажите, что

$$\text{cl} \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcap_{i \in I} \text{cl } C_i. \quad (5)$$

Покажите, что если опустить условие (4), то равенство (5) может и не иметь места.

- 3.5. Пусть $(C_i)_{i=1, \dots, n}$ — конечное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, такое что

$$\bigcap_{i=1}^n \text{ri } C_i \neq \emptyset. \quad (6)$$

Докажите, что

$$\operatorname{ri} \bigcap_{i=1}^n C_i = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{ri} C_i, \quad (7)$$

Покажите, что если опустить требование (6), то (7) может и не выполняться.

§ 4. ОПОРНЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Интуитивно ясно, что если x — относительно-граничная точка выпуклого множества C , то найдётся гиперплоскость H , проходящая через x и такая, что все точки C , которые не принадлежат H , лежат по одну сторону от H . Один из основных результатов настоящего параграфа утверждает, что это действительно так.

Пусть C — непустое замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Под опорным полупространством к (или для) C мы понимаем всякое замкнутое полупространство K в $\mathbb{R}^d$, такое что $C \subset K$ и $H \cap C \neq \emptyset$, где H обозначает граничную гиперплоскость K . Опорной гиперплоскостью к C называется всякая гиперплоскость H в $\mathbb{R}^d$, ограничивающая некоторое опорное полупространство для C .

В определении опорной гиперплоскости H к C допускается, что $C \subset H$ (в этом случае оба замкнутых полупространства, ограничиваемые H , являются опорными для C). Если C не содержится в H , то говорят, что H — собственная опорная гиперплоскость.

Аналитически определение опорной гиперплоскости можно выразить так: гиперплоскость $H(y, \alpha)$ является опорной к непустому замкнутому выпуклому множеству C тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \max_{x \in C} \langle x, y \rangle \quad (1)$$

или

$$\alpha = \min_{x \in C} \langle x, y \rangle. \quad (2)$$

Если для $H(y, \alpha)$ выполнено (2), то для $H(-y, -\alpha)$ выполнено (1). Так как $H(-y, -\alpha) = H(y, \alpha)$, мы заключаем, что

любая гиперплоскость H , опорная к C , представима в виде $H(y, \alpha)$, где y и α удовлетворяют условию (1), а значит, $C \subset K(y, \alpha)$. Отметим, кстати, что если $H(y, \alpha)$ — такая опорная гиперплоскость, что $C \subset K(y, \alpha)$, то она является собственной в том и только том случае, когда

$$\inf_{x \in C} \langle x, y \rangle < \max_{x \in C} \langle x, y \rangle.$$

Начнём со следующего результата:

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть C — непустое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$ и H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$. Приводимые ниже два условия равносильны:

- (a) $H \cap \text{ri } C = \emptyset$;
- (b) C содержится в одном из двух замкнутых полупространств, ограниченных H , но не содержится в H .

Доказательство. Предположим, что выполнено (a). Пусть $x_0 \in \text{ri } C$ (см. теорему 3.1). Тогда $x_0 \notin H$ в силу (a). Таким образом, C не содержится в H . Допустим, что существует такая точка $x_1 \in C$, что x_0 и x_1 находятся по разные стороны от H . Тогда найдутся такие y и α , что $H = H(y, \alpha)$ и

$$\langle x_0, y \rangle < \alpha < \langle x_1, y \rangle.$$

Положим

$$\lambda := \frac{\alpha - \langle x_0, y \rangle}{\langle x_1, y \rangle - \langle x_0, y \rangle}$$

и

$$x_\lambda := (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$$

Ясно, что $\lambda \in]0, 1[$ и, значит, $x_\lambda \in]x_0, x_1[$. Далее, непосредственное вычисление показывает, что $\langle x_\lambda, y \rangle = \alpha$, т. е.

$x_\lambda \in H$. С другой стороны, поскольку $x_0 \in \text{ri } C$ и $x_\lambda \in]x_0, x_1[$, из теоремы 3.3 следует, что $x_\lambda \in \text{ri } C$, а следовательно, $x_\lambda \in H \cap \text{ri } C$, вопреки предположению. Наконец, C содержится в том замкнутом полупространстве, ограниченном H , которое содержит точку x_0 .

Обратно, пусть выполнено условие (b). Допустим, что существует точка $x \in H \cap \text{ri } C$. В силу (b) найдётся точка $y \in C \setminus H$. Тогда ввиду импликации (a) $\Rightarrow$ (c) из теоремы 3.5 найдётся такая точка $z \in C$, что $x \in]y, z[$, т.е.

$$x = (1 - \lambda)y + \lambda z$$

для некоторого подходящего $\lambda \in]0, 1[$. Далее, найдутся u и α , такие что $H = H(u, \alpha)$ и $C \subset K(u, \alpha)$. Ясно, что $\langle y, u \rangle < \alpha$ и $\langle z, u \rangle \leq \alpha$, а потому

$$\begin{aligned} \langle x, u \rangle &= \langle (1 - \lambda)y + \lambda z, u \rangle \\ &= (1 - \lambda)\langle y, u \rangle + \lambda\langle z, u \rangle \\ &< (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha. \end{aligned}$$

В то же время $\langle x, u \rangle = \alpha$, так как $x \in H$. Мы пришли к противоречию. Значит пересечение $H \cap \text{ri } C$ пусто. $\square$

Из доказанной теоремы немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Опорная гиперплоскость H к непустому замкнутому выпуклому множеству C в $\mathbb{R}^d$ тогда и только тогда является собственной, когда $H \cap \text{ri } C = \emptyset$.

Следующий результат имеет фундаментальное значение:

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть C — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Для любой точки x из $\text{rb } C$ существует собственная опорная гиперплоскость H к C , проходящая через x .

Мы дадим доказательство теоремы 4.3, основанное на следующей лемме:

ЛЕММА 4.4. Пусть C — непустое открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$ и x — произвольная точка из $\mathbb{R}^d$, не принадлежащая C . Тогда существует такая гиперплоскость H в $\mathbb{R}^d$, что $x \in H$ и $H \cap C = \emptyset$.

Доказательство. Проведем индукцию по d . Очевидно, утверждение справедливо для $d = 0, 1$. Но для выполнения шага индукции нам нужно знать, что оно верно и для $d = 2$. Итак,

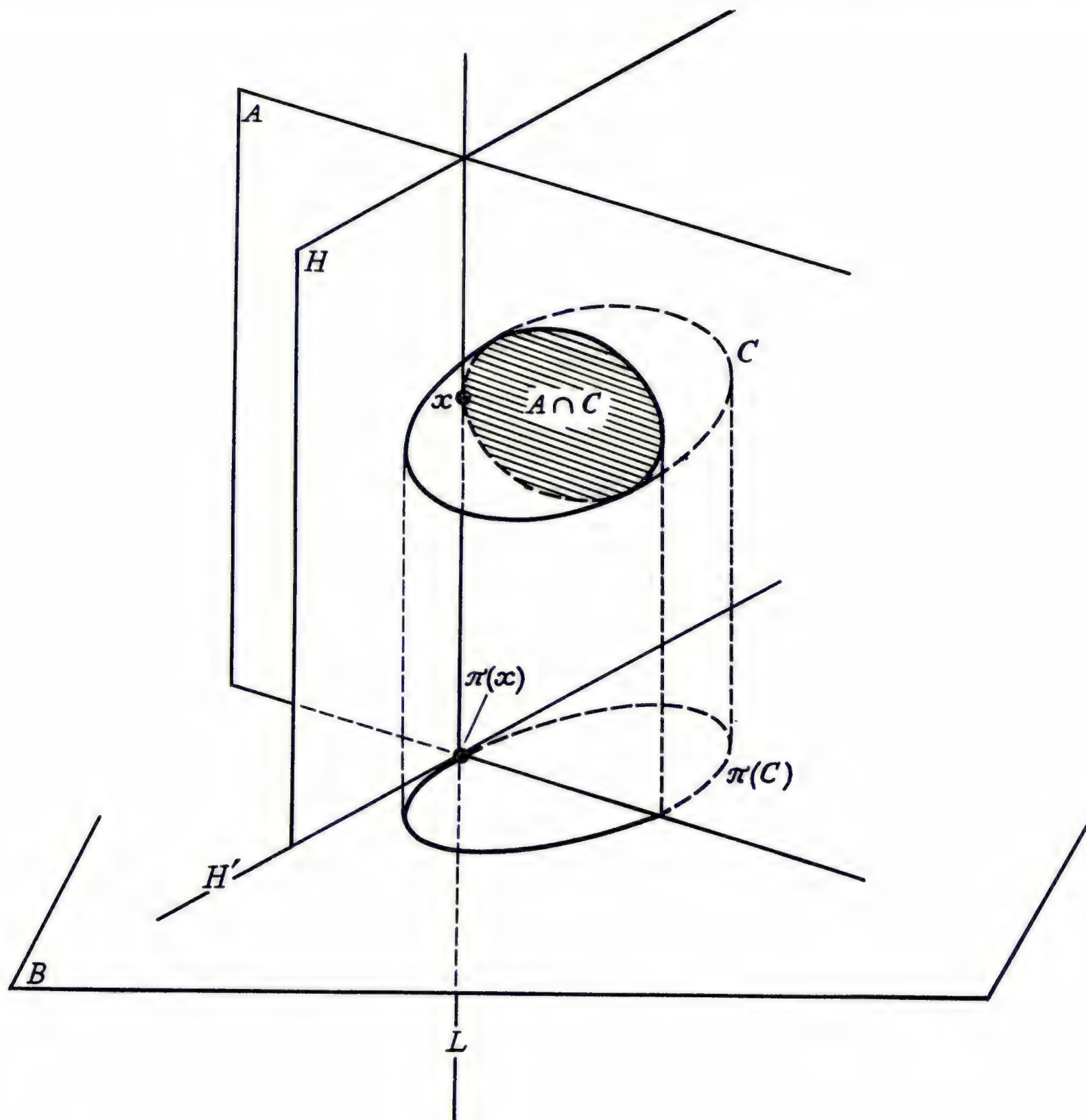


Рис. 1

пусть C — непустое выпуклое открытое множество в $\mathbb{R}^d$, и пусть $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$. Докажем, что в $\mathbb{R}^d$ существует такая прямая L , что $x \in L$ и $L \cap C = \emptyset$. Пусть S — некоторая окружность с центром в x . Для всякой точки $u \in C$ обозначим через u' ту единственную точку S , в которой полупрямая

$$\{(1-\lambda)x + \lambda u \mid \lambda > 0\},$$

выходящая из x и проходящая через u , пересекается с S .

Множество

$$C' := \{u' \mid u \in C\}$$

представляет собой открытую дугу на S . Так как $x \notin C$ и C выпукло, то никакие две диаметрально противоположные точки на S не могут одновременно принадлежать C' . Значит, угол между полупрямыми, выходящими из x и проходящими через концы дуги C' , не превышает π . Поэтому в качестве L можно взять любую из двух прямых, порождаемых этими полупрямыми. (В случае когда указанный угол равен π , прямая L , конечно, единственна.)

Теперь пусть $d > 2$ и наше утверждение уже доказано для всех размерностей, меньших d . Пусть C — непустое открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$ и $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$ (см. рис. 1, иллюстрирующий наиболее "трудный" случай, когда $x \in \text{cl } C$). Возьмём какое-нибудь двумерное аффинное подпространство A в $\mathbb{R}^d$, такое что $x \in A$ и $A \cap C \neq \emptyset$. Тогда $A \cap C$ — непустое открытое выпуклое множество в A , не содержащее точки x . Отождествляя A с $\mathbb{R}^2$ и используя доказанный выше для $\mathbb{R}^2$ результат, мы видим, что в A существует такая прямая L , что $x \in L$ и

$$L \cap (A \cap C) = L \cap C = \emptyset.$$

Пусть B — какая-либо гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, ортогональная к L , и $\pi: \mathbb{R}^d \rightarrow B$ — ортогональная проекция. Тогда $\pi(C)$ — непустое открытое выпуклое множество в B . Далее, поскольку $\pi^{-1}(\pi(x)) = L$, то $\pi(x) \notin \pi(C)$. Поэтому по предположению индукции существует гиперплоскость H' в B , такая что $\pi(x) \in H'$ и $H' \cap \pi(C) = \emptyset$. Но тогда

$$H := \text{aff}(H' \cup L) = \pi^{-1}(H')$$

будет гиперплоскостью в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющей условиям $x \in H$ и $H \cap C = \emptyset$. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему 4.3.

Доказательство теоремы 4.3. В случае $\dim C = -1, 0$ до-

казывать нечего. Пусть $\dim C \geq 1$, и пусть C и x таковы, как указано в формулировке теоремы. Применим лемму 4.4 к выпуклому множеству $\text{ri} C$ и точке x , лежащей в аффинном пространстве $\text{aff} C$ (мы отождествляем $\text{aff} C$ с $\mathbb{R}^e$, где $e := \dim(\text{aff} C)$). Чтобы убедиться в применимости леммы 4.4, заметим, что множество $\text{ri} C$ непусто по теореме 3.1, выпукло в силу утверждения (b) теоремы 3.4 и открыто в $\text{aff} C$; далее, x принадлежит $\text{aff} C$. На основании леммы 4.4 заключаем, что существует такая гиперплоскость H' в $\text{aff} C$, что $x \in H'$ и $H' \cap \text{ri} C = \emptyset$. Очевидно, что найдется гиперплоскость H в $\mathbb{R}^d$, такая что $H \cap \text{aff} C = H'$ (если $\text{aff} C = \mathbb{R}^d$, то $H = H'$). Ясно, что по-прежнему $x \in H$ и $H \cap \text{ri} C = \emptyset$. Наконец, импликация (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 4.1 показывает, что H является собственной опорной гиперплоскостью к C . $\square$

Фундаментальную роль играет и следующий результат:

ТЕОРЕМА 4.5. Всякое непустое замкнутое выпуклое множество C в $\mathbb{R}^d$ совпадает с пересечением всех своих опорных полупространств.

Доказательство. В случае $\dim C = 0$ теорема, очевидно, верна. В случае $C = \mathbb{R}^d$ никаких опорных полупространств вообще нет, и, значит, в этом случае теорема также верна. Итак, пусть $\dim C \geq 1$ и x — точка в $\mathbb{R}^d$, не принадлежащая C ; докажем, что тогда найдётся такое опорное полупространство K для C , что $x \notin K$. Если $x \notin \text{aff} C$, то существует такая гиперплоскость H в $\mathbb{R}^d$, что $\text{aff} C \subset H$ и $x \notin H$. То из двух замкнутых полупространств, ограниченных H , которое не содержит x , обладает нужным нам свойством. Если же $x \in \text{aff} C$, то пусть z — относительно-внутренняя точка C (см. теорему 3.1). В таком случае $[z, x] \cap C$ представляет собой отрезок вида $[z, u]$, где $u \in \text{rb} C$, и $[z, u[$ содержится в $\text{ri} C$ (см. теорему 3.3). По теореме 4.3 найдётся собственная опорная гиперплоскость H к C , такая что $u \in H$. Тогда опорное полупространство K для C , ограниченное H , обладает требуемым свойством. В самом деле, допустим, что $x \in K$. Так как $z \in \text{ri} C$, то, в силу следствия 4.2, $z \notin H$ и, значит, $z \in \text{int} K$. Но в

таком случае, как показывает теорема 3.3, $]z, x[$ содержится в $\text{int } K$, что невозможно, поскольку точка u , лежащая в $]z, x[$, принадлежит $H = \text{bd } K$. $\square$

Можно сказать, что теорема 4.5 даёт "внешнее представление" замкнутого выпуклого множества. В следующем параграфе мы встретимся с "внутренним представлением" компактного выпуклого множества.

У п р а ж н е н и я

- 4.1. Пусть C_1 и C_2 — выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$. Говорят, что гиперплоскость H в $\mathbb{R}^d$ разделяет C_1 и C_2 , если C_1 содержится в одном из двух замкнутых полупространств, ограниченных H , а C_2 — в другом. Заметим, что мы не исключаем случаи $C_1 \subset H$ и/или $C_2 \subset H$. Если хотя бы одно из двух множеств C_1 или C_2 не содержится в H , то говорят, что H разделяет эти множества собственно. Докажите, что гиперплоскость H , собственно разделяющая C_1 и C_2 , существует в том и только том случае, когда $\text{ri } C_1 \cap \text{ri } C_2 = \emptyset$. [Указание. Рассмотрите выпуклое множество $C := C_1 - C_2$. Используйте результат упр. 3.2.]
- 4.2. Пусть C_1 и C_2 — выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$. Говорят, что гиперплоскость $H(y, \alpha)$ сильно разделяет C_1 и C_2 , если для некоторого $\varepsilon > 0$ обе гиперплоскости $H(y, \alpha - \varepsilon)$ и $H(y, \alpha + \varepsilon)$ разделяют C_1 и C_2 (см. упр. 4.1). Докажите, что гиперплоскость H , сильно разделяющая C_1 и C_2 , существует тогда и только тогда, когда $\emptyset \neq \text{cl}(C_1 - C_2)$. Выведите отсюда, что если C_1 и C_2 — непересекающиеся замкнутые выпуклые множества, одно из которых компактно, то для них существует сильно разделяющая гиперплоскость.

§ 5. ГРАННАЯ СТРУКТУРА¹ ЗАМКНУТОГО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

В этом параграфе изучаются некоторые "крайние" выпуклые подмножества замкнутого выпуклого множества C , называемые гранями C .

¹ В оригинале *facial structure* . — Прим. перев.

В частности, мы докажем, что если множество C компактно, то оно совпадает с выпуклой оболочкой своих нульмерных граней. Это и есть "внутреннее представление", упомянутое в § 4.

Ниже C — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Выпуклое подмножество F в C называется гранью¹ C , если для любых двух различных точек $y, z \in C$, таких что пересечение $]y, z[\cap F$ непусто, мы имеем $[y, z] \subset F$. Заметим, что для того, чтобы выполнялось включение $[y, z] \subset F$, достаточно ввиду выпуклости F , чтобы y и z принадлежали F .

Подмножества $\emptyset$ и C множества C оба являются его гранями; они называются несобственными гранями, а все остальные грани — собственными.

Точка $x \in C$ называется крайней² точкой множества C , если $\{x\}$ — грань. В соответствии с данным определением это означает, что точка x не является относительно-внутренней ни для одного отрезка $[y, z]$ в C , или, что то же самое, что множество $C \setminus \{x\}$ тоже выпукло. Множество всех крайних точек множества C обозначается $\text{ext } C$.

Грань F множества C называется k -гранью, если $\dim F = k$. Таким образом, 0-грани — это крайние точки (точнее говоря, одноточечные множества $\{x\}$, где x — крайняя точка.) Гиперграни³ множества C — это такие его грани F , для которых $0 \leq \dim F = \dim C - 1$.

Ясно, что пересечение любого набора $\mathcal{A}$ граней множества C тоже будет гранью C . Значит, у C существует наибольшая грань, принадлежащая всем элементам набора $\mathcal{A}$; это — пересечение всех элементов $\mathcal{A}$. Можно также заключить, что у C существует и наименьшая грань, содержащая все элементы набора $\mathcal{A}$ — таковой будет пересечение всех тех граней C , которые содержат (каждая) все элементы из $\mathcal{A}$ (заметим, что само C представляет собой такую грань). Иными словами, если обозначить множество

¹ В оригинале *face*. — Прим. ред.

² Соответствующий английский термин — *extreme* (крайний, предельный, экстремальный). Отсюда обозначение *ext* ниже. — Прим. ред.

³ В оригинале *facets*. — Прим. ред.

всех граней множества C через $\mathcal{F}(C)$, то можно сказать, что частично упорядоченное множество $(\mathcal{F}(C), \subset)$ является полной решёткой с решёточными операциями

$$\inf \mathcal{A} := \bigcap \{F \in \mathcal{F}(C) \mid F \in \mathcal{A}\},$$

$$\sup \mathcal{A} := \bigcap \{G \in \mathcal{F}(C) \mid \forall F \in \mathcal{A} : F \subset G\}.$$

(По поводу понятий теории решёток см. добавление 1.) Мы будем называть $(\mathcal{F}(C), \subset)$ решёткой граней множества C . (Конечно, частично упорядоченное множество $(\mathcal{F}(C), \supset)$ также представляет собою полную решётку. Однако, говоря о решётке граней множества H , мы всегда будем иметь в виду $\mathcal{F}(C)$ с частичным порядком $\subset$.)

Если C — замкнутое выпуклое множество с $\dim C \geq 1$, то у него есть грани некоторого специального вида. А именно, если H — собственная опорная гиперплоскость к C (см. следствие 4.2), то множество $F := H \cap C$ будет собственной гранью C . В самом деле, F — непустое собственное подмножество в C по самому построению, а поскольку оно является пересечением двух выпуклых множеств, оно также и выпукло. Убедимся, что это множество обладает характеристическим свойством грани. Пусть y и z — две точки множества C , такие что пересечение $]y, z[\cap F$ непусто. Тогда $(1-\lambda)y + \lambda z$ принадлежит H для некоторого $\lambda \in]0, 1[$. Далее, существуют такие u и α , что $H = H(u, \alpha)$ и $C \subset K(u, \alpha)$. Имеем $\langle y, u \rangle \leq \alpha$, $\langle z, u \rangle \leq \alpha$ и $\langle (1-\lambda)y + \lambda z, u \rangle = \alpha$, откуда $\langle y, u \rangle = \langle z, u \rangle = \alpha$, т. е. y и z принадлежат H , а потому и F , что и требовалось показать. Грани F множества C , представимые в виде $F = H \cap C$, где H — собственная опорная гиперплоскость к C , называются (собственными) выступающими¹ гранями. Для любого замкнутого выпуклого множества C (включая и множества C с $\dim C = -1, 0$) удобно считать $\emptyset$ и C выступающими гранями C ; будем называть их несобственными выступающими гранями.

¹ Соответствующий английский термин — *exposed* (обнажённый, открытый, экспонированный). Отсюда обозначение *exr* ниже. — Прим. ред.

(Здесь возникает небольшое формальное затруднение, связанное с тем, что определение выступающей грани множества C зависит от выбора конкретного аффинного пространства, содержащего C . "Первоначально" C лежит в $\mathbb{R}^d$, а нам желательно иметь возможность рассматривать C как подмножество любого аффинного подпространства A в $\mathbb{R}^d$, которое содержит $\text{aff } C$. Однако это затруднение легко преодолевается, поскольку гиперплоскости в A — это просто непустые пересечения вида $H \cap A$, где H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, не содержащая A .)

Точка $x \in C$ называется выступающей точкой множества C , если $\{x\}$ — выступающая грань. Множество всех выступающих точек C обозначается $\text{ехр } C$. Таким образом, $\text{ехр } C$ — подмножество в $\text{ехт } C$.

Множество всех выступающих граней множества C обозначим через $\mathcal{E}(C)$. Ниже в этом параграфе мы обсудим, как устроено упорядоченное множество $(\mathcal{E}(C), \subset)$.

Чтобы проиллюстрировать введённые понятия, рассмотрим следующий пример. Пусть C — выпуклая оболочка двух непересекающихся замкнутых кругов в $\mathbb{R}^2$ одного и того же радиуса. Тогда граница C состоит из двух отрезков $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$ и двух открытых полуокружностей; 1-грани C — это два отрезка $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$ и в действительности это выступающие грани; крайние точки (т. е. 0-грани) — это точки x_1, x_2, x_3, x_4 , а также точки указанных двух открытых полуокружностей. Ясно, что эти последние точки (лежащие на полуокружностях) являются выступающими. Крайние же точки x_1, x_2, x_3, x_4 — не выступающие; в самом деле, опорная гиперплоскость к C , содержащая одну из точек x_1, x_2, x_3, x_4 , должна содержать также и один из двух граничных отрезков. Это, в частности, показывает, что невыступающие грани существуют.

Каждая собственная выступающая грань является пересечением двух замкнутых множеств и, следовательно, сама замкнута. На самом деле справедлив следующий результат:

ТЕОРЕМА 5.1. Каждая грань F замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$ замкнута.

Доказательство. Для $\dim F = -1, 0$ показывать нечего. Допустим, что $\dim F \geq 1$ и рассмотрим произвольную точку x из $\text{cl } F$. Пусть x_0 — некоторая точка из $\text{ri } F$ (см. теорему 3.1). Если $x = x_0$, то $x \in F$, что и требуется установить. Если же $x \neq x_0$, то (по теореме 3.3) $[x_0, x[$ содержится в $\text{ri } F$. В частности, $]x_0, x[\cap F \neq \emptyset$, откуда по определению грани следует, что x принадлежит F . $\square$

Среди прочего теорема 5.1 показывает, что имеет смысл говорить о "гранях граней" (замкнутого выпуклого множества):

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть F — грань замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$. Ее подмножество G является гранью C в том (и только том) случае, когда оно представляет собой грань F .

Доказательство. Непосредственно из определения вытекает, что если множество G служит гранью C , то оно будет также и гранью F . Обратно, пусть G — грань F и y, z — такие точки C , что интервал $]y, z[$ пересекается с G . Так как $G \subset F$, то интервал $]y, z[$ пересекается и с F . Значит, $y, z \in F$, поскольку F — грань C . Но в таком случае мы имеем также $y, z \in G$ (ибо G — грань F), что и требовалось доказать. $\square$

Следует заметить, что если в теореме 5.2 всюду заменить "грань" на "выступающая грань", то в части достаточности теорема перестает быть справедливой. В самом деле, в рассмотренном выше примере x_1 — выступающая точка грани $[x_1, x_2]$, а $[x_1, x_2]$ — выступающая грань C , но x_1 не является выступающей точкой C .

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть F — грань замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$, причём $F \neq C$. Тогда $F \subset \text{rb } C$.

Доказательство. Для случаев $\dim C = -1, 0$ доказывать нечего. Поэтому будем считать, что $\dim C \geq 1$. Пусть F — такая грань C , что некоторая точка x из F принадлежит $\text{ri } C$. Если мы установим, что $F = C$, то всё будет доказано. Пусть y — произвольная точка из C . Если $y = x$, то y принадлежит F , как нам и надо. Если же $y \neq x$, то в C найдётся такая точка z , что $x \in]y, z[$ (в силу импликации (a) $\Rightarrow$ (c)).

из теоремы 3.5). Так как x принадлежит F , а F — грань, мы заключаем, что и y принадлежит F . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть F и G — грани замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$, такие что $G \subsetneq F$. Тогда $G \subset \text{rb} F$.

Доказательство. В силу теоремы 5.2, G является гранью F . Поэтому наше утверждение немедленно вытекает из теоремы 5.3. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть F и G — грани замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$, такие что $G \subsetneq F$. Тогда $\dim G < \dim F$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку $G \subset F$, то $\text{aff } G \subset \text{aff } F$. Допустим, что $\text{aff } G = \text{aff } F$. Тогда $\text{ri } G \subset \text{ri } F$, так как $G \subset F$. Учитывая следствие 5.4, заключаем, что $\text{ri } G = \emptyset$. Ввиду теоремы 3.1 отсюда следует, что $G = \emptyset$, а значит, также и $F = \emptyset$ (поскольку $\text{aff } F = \text{aff } G$), что противоречит условию $G \neq F$. Итак, обязательно $\text{aff } G \subsetneq \text{aff } F$ и, следовательно, $\dim G < \dim F$. $\square$

Для любого подмножества M замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$ существует наименьшая грань C , содержащая M , — таковой гранью будет пересечение всех граней, содержащих M . Теорема 5.3 показывает, что если M содержит некоторую точку из $\text{ri } C$, то наименьшая грань, содержащая M , — это само множество C .

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть C — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$, x — некоторая точка из C , а F — грань множества C , содержащая эту точку. Грань F является наименьшей гранью C , содержащей x , в том и только том случае, если $x \in \text{ri } F$.

Доказательство. Если $x \in \text{ri } F$, то (по следствию 5.4) F — наименьшая грань, содержащая x . Если $x \in \text{rb } F$, то (по теореме 4.3) существует грань G множества F , такая что $x \in G \subsetneq F$ (фактически существует даже выступающая такая грань). В силу теоремы 5.2, G — также грань C , и потому F не может быть наименьшей гранью, содержащей x . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.7. Пусть C — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Тогда множества вида $\text{ri } F$, где $F \in \mathcal{F}(C) \setminus \{\emptyset\}$, образуют разбиение C .

Доказательство. Наше утверждение равносильно утверждению, что для каждой точки $x \in C$ существует единственная грань F множества C , такая что $x \in \text{ri } F$. Но теорема 5.6 как раз и даёт такую единственную грань, а именно наименьшую грань C , содержащую точку x .¹ $\square$

Перейдём теперь к изучению выступающих граней. Прежде всего докажем следующий результат:

ТЕОРЕМА 5.8. Всякая гипергрань F замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$ является выступающей.

Доказательство. По определению гиперграни мы имеем $\dim F \geq 0$, поэтому в силу теоремы 3.1 существует точка $x \in \text{ri } F$. Тогда, по теореме 5.6, F — наименьшая из граней C , содержащих x . С другой стороны, теорема 4.3 показывает, что существует выступающая грань G множества C , такая что $x \in G$. Отсюда следует, что $F \subset G \subsetneq C$. Используя следствие 5.5, получаем

$$\dim C - 1 = \dim F \leq \dim G < \dim C,$$

откуда видно, что $\dim G = \dim F$. Поэтому, в силу следствия 5.5, $F = G$, а значит, F — выступающая грань. $\square$

В начале этого параграфа мы отмечали, что пересечение любого набора граней замкнутого выпуклого множества C снова будет гранью C . Приводимая ниже теорема показывает, что для выступающих граней дело обстоит точно так же:

ТЕОРЕМА 5.9. Пусть $\{F_i \mid i \in I\}$ — произвольное множество выступающих граней замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^d$, и пусть

$$F := \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Тогда F — тоже выступающая грань C .

Доказательство. Если F — это $\emptyset$ или C , то доказывать нечего. Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что F — не-

¹ Для точек из $\text{ri } C$ такой гранью является само C . — Прим. ред.

пустое пересечение собственных выступающих граней $F_i, i \in I$.

Сначала рассмотрим случай, когда I — конечный набор, скажем $I = \{1, \dots, n\}$. Для каждого $i \in I$ найдётся такая гиперплоскость $H(y_i, \alpha_i)$, что

$$F_i = H(y_i, \alpha_i) \cap C \quad (1)$$

и

$$C \subset K(y_i, \alpha_i). \quad (2)$$

Не теряя общности, можно считать, что $\sigma \in \text{int } C$. Тогда σ — внутренняя точка всех $K(y_i, \alpha_i)$, и поэтому все α_i строго положительны. Полагая

$$z_i := \alpha_i^{-1} y_i$$

для $i = 1, \dots, n$, перепишем (1) и (2) в виде

$$F_i = H(z_i, 1) \cap C,$$

$$C \subset K(z_i, 1).$$

Пусть

$$z_0 := \sum_{i=1}^n n^{-1} z_i.$$

Тогда для любого $x \in C$

$$\begin{aligned} \langle x, z_0 \rangle &= \left\langle x, \sum_{i=1}^n n^{-1} z_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n n^{-1} \langle x, z_i \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^n n^{-1} \cdot 1 = 1, \end{aligned} \quad (3)$$

откуда следует, что

$$C \subset K(z_0, 1).$$

Далее, равенство в (3) имеет место тогда и только тогда, когда $x \in H(z_i, 1)$ для $i = 1, \dots, n$. Это показывает,

что

$$H(x_0, 1) \cap C = F.$$

Следовательно, F — выступающая грань.

Если набор I бесконечен, то в силу предыдущего достаточно установить, что существуют $i_1, \dots, i_n \in I$, такие что

$$\bigcap_{\nu=1}^n F_{i_\nu} = F.$$

В качестве i_1 возьмём произвольный элемент из I . Если

$F = F_{i_1}$, то всё доказано. Если $F \subsetneq F_{i_1}$, то для некоторого $i_2 \in I$

$$F \subset F_{i_1} \cap F_{i_2} \subsetneq F_{i_1}.$$

Из следствия 5.5 вытекает, что

$$\dim(F_{i_1} \cap F_{i_2}) < \dim F_{i_1}.$$

Если $F = F_{i_1} \cap F_{i_2}$, то всё доказано. Если $F \subsetneq F_{i_1} \cap F_{i_2}$, то для некоторого $i_3 \in I$

$$F \subset F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3} \subsetneq F_{i_1} \cap F_{i_2}.$$

Вновь применяя следствие 5.5, получаем

$$\dim(F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}) < \dim(F_{i_1} \cap F_{i_2}).$$

Если $F = F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$, то всё доказано. Если же $F \subsetneq F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}$, то для некоторого $i_4 \in I, \dots$, и т. д. Так как на каждом шаге размерность понижается по крайней мере на единицу, то после конечного числа шагов процесс обязательно закончится и даст нам $i_1, \dots, i_n \in I$, такие что

$$F = \bigcap_{\nu=1}^n F_{i_\nu},$$

как и требовалось. $\square$

Из теоремы 5.9 следует, что частично упорядоченное множество $(\mathcal{E}(C), \subset)$ выступающих граней замкнутого выпуклого множества C в $\mathbb{R}^2$ представляет собой полную решётку

$$\inf \mathcal{A} := \bigcap \{F \in \mathcal{E}(C) \mid F \in \mathcal{A}\},$$

$$\sup \mathcal{A} := \bigcap \{G \in \mathcal{E}(C) \mid \forall F \in \mathcal{A} : F \subset G\}$$

для $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(C)$. Стоит отметить, что, вообще говоря, $(\mathcal{E}(C), \subset)$ не есть подрешётка (см. добавление 1) решётки $(\mathcal{F}(C), \subset)$. В самом деле, если $\mathcal{A}$ — подмножество в $\mathcal{E}(C)$, то $\sup \mathcal{A}$, подсчитанный в $(\mathcal{E}(C), \subset)$, может отличаться от $\sup \mathcal{A}$, подсчитанного в $(\mathcal{F}(C), \subset)$. (Операция $\inf$, однако, даёт одинаковые результаты в $(\mathcal{E}(C), \subset)$ и в $(\mathcal{F}(C), \subset)$.) Например, в $\mathbb{R}^3$ нетрудно построить замкнутое выпуклое множество C со следующими свойствами (см. рис. 2). Среди крайних точек C найдутся три, скажем x_1, x_2, x_3 , такие что $\text{conv}\{x_1, x_2, x_3\}$ — выступающая грань, x_1 и x_2 — выступающие точки, но грань $[x_1, x_2]$ не является выступающей. Поэтому если рассмотреть подмножество $\mathcal{A}$ в $\mathcal{E}(C)$, состоящее из двух выступающих граней $\{x_1\}$ и $\{x_2\}$, то мы получим, что $\sup \mathcal{A}$ в $(\mathcal{F}(C), \subset)$ — это $[x_1, x_2]$, в то время как $\sup \mathcal{A}$ в $(\mathcal{E}(C), \subset)$ совпадает с $\text{conv}\{x_1, x_2, x_3\}$.

Последняя теорема данного параграфа касается свойств крайних точек. Замкнутые полупространства и аффинные подпространства — это выпуклые множества без крайних точек. А вот компактные

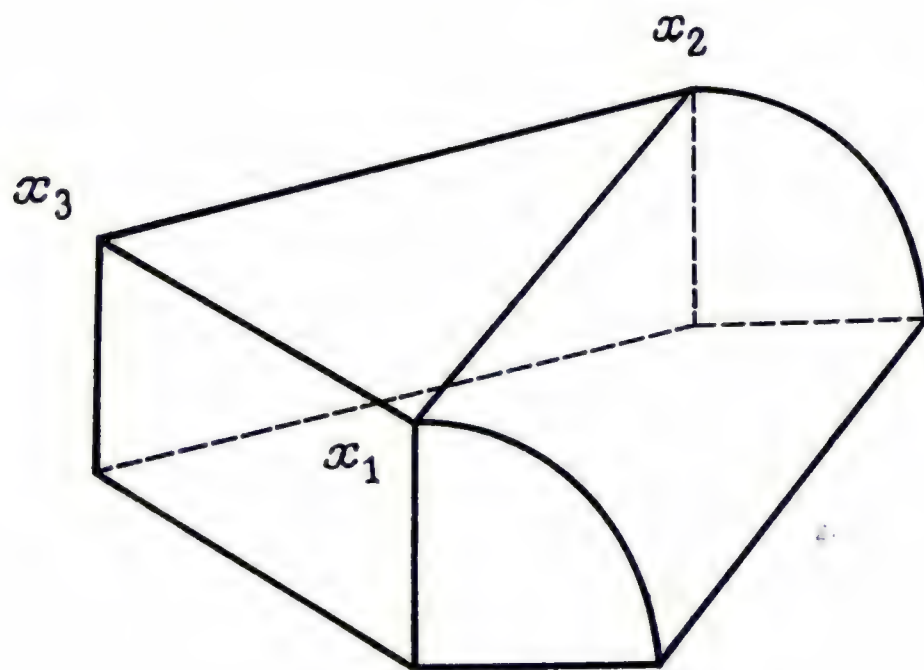


Рис. 2

выпуклые множества, оказывается, "натянуты" на свои крайние точки. Этот результат известен как теорема Минковского:

ТЕОРЕМА 5.10. Пусть C — компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$, а M — подмножество в C . Следующие два условия равносильны:

- (a) $C = \text{conv } M$;
- (b) $\text{ext } C \subset M$.

В частности,

- (c) $C = \text{conv}(\text{ext } C)$.

Доказательство. Допустим, что у C существует крайняя точка x , которая не принадлежит M . Тогда M — подмножество в $C \setminus \{x\}$, а поскольку, в силу определения крайней точки, $C \setminus \{x\}$ выпукло, то и $\text{conv } M$ также содержится в $C \setminus \{x\}$. Это доказывает импликацию (a) $\Rightarrow$ (b).

Чтобы доказать импликацию (b) $\Rightarrow$ (a), достаточно установить, что

$$C \subset \text{conv}(\text{ext } C). \quad (4)$$

(В самом деле, допустим, что (4) уже доказано. Тогда, поскольку включение, обратное к (4), очевидно, мы имеем $C = \text{conv}(\text{ext } C)$. Но в таком случае $C = \text{conv } M$ и для любого подмножества M множества C , содержащего $\text{ext } C$.) Докажем (4) индукцией по размерности C . Для $\dim C = -1, 0$ доказывать нечего. Для $\dim C = 1$ наше утверждение справедливо очевидным образом. Допустим, что оно верно для всех компактных выпуклых множеств размерности $< e$, где $e \geq 2$, и рассмотрим компактное выпуклое множество C размерности e . Пусть x — произвольная точка C ; надо доказать, что x представима в виде выпуклой комбинации крайних точек C (см. теорему 2.2). Если x сама является крайней точкой, то доказывать нечего. Если же x — не крайняя точка, то в C найдется такой отрезок, содержащий её в своей относительной внутренней точке. Расширяя, если нужно, этот отрезок, мы видим, что найдутся такие точки $y_0, y_1 \in \text{rb } C$, что $x \in]y_0, y_1[$. Пусть F_0 и F_1 — наименьшие грани C , содержащие y_0 и y_1 соответственно. Тогда F_0 и F_1 — собственные грани C (следствие 5.7). В частности, они — компактные выпуклые множества (теорема 5.1), и по следствию 5.5 оба они имеют размерность $< e$.

В таком случае по предположению индукции найдутся точки $x_{01}, \dots, x_{0r} \in \text{ext } F_0$ и $x_{11}, \dots, x_{1q} \in \text{ext } F_1$, такие что y_0 есть выпуклая комбинация точек x_{0i} , а y_1 — выпуклая комбинация точек x_{1j} . А так как x — выпуклая комбинация y_0 и y_1 , то x — выпуклая комбинация x_{0i} и x_{1j} . Для завершения доказательства достаточно заметить, что x_{0i} и x_{1j} — это на самом деле крайние точки C (теорема 5.2). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5.11. Пусть C — компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$ размерности $\dim C = n$. Тогда каждая точка множества C представима как выпуклая комбинация не более чем $n+1$ его крайних точек.

Доказательство. Это следует из утверждения (с) теоремы 5.10 в сочетании со следствием 2.4. $\square$

У п р а ж н е н и я

- 5.1. Докажите, что в случае, когда C — двумерный выпуклый компакт, множество $\text{ext } C$ замкнуто.
- 5.2. Пусть C — выпуклая оболочка множества всех точек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 \in [-1, 1]$$

или

$$\alpha_3 = 0, \quad (\alpha_1 - 1)^2 + \alpha_2^2 = 1.$$

Докажите, что множество $\text{ext } C$ незамкнуто.

- 5.3. Пусть C — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Докажите, что если выпуклое подмножество F в C является гранью C , то множество $C \setminus F$ выпукло. Покажите, что обратное, вообще говоря, неверно.
- 5.4. Пусть C — непустое замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$. Будем называть аффинное подпространство A в $\mathbb{R}^d$ опорным для (или к) C , если $A \cap C \neq \emptyset$ и множество $C \setminus A$ выпукло. Докажите, что опорные гиперплоскости к C в смысле § 4 совпадают с опорными гиперплоскостями к C в смысле только что данного определения. Докажите, что для непустого

выпуклого подмножества F множества C следующие три условия равносильны:

- (a) F – грань C ;
- (b) существует такое опорное аффинное подпространство A к C , что $A \cap C = F$;
- (c) $\text{aff } F$ – опорное аффинное подпространство к C , такое что $(\text{aff } F) \cap C = F$.

(Равносильность условий (a) и (b) проливает свет на различие между понятиями грани и выступающей грани.)

5.5. Пусть C – компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$ и M – подмножество в $\text{ext } C$. Докажите, что $\text{conv } M$ тогда и только тогда является гранью C , когда

$$(\text{aff } M) \cap \text{conv} ((\text{ext } C) \setminus M) = \emptyset.$$

5.6. Покажите, что существуют такие компактные выпуклые множества C , что

$$C \neq \text{conv} (\text{ext } C).$$

Докажите теорему Страшевича: для любого компактного выпуклого множества C

$$C = \text{clconv} (\text{ext } C).$$

(Предупреждаем – это не просто!)

§ 6. ПОЛЯРНОСТЬ

Понятие двойственности играет важную роль в теории выпуклости вообще и в теории многогранников в частности. Фактически мы будем иметь дело с двумя понятиями двойственности – узким, для которого мы используем термин "полярность", и широким, в случае которого будем говорить просто о двойственности. Понятие полярности применимо к произвольным выпуклым множествам, понятие же двойственности в широком смысле – только к многогранникам.

В этом параграфе обсуждается понятие полярности. С каждым подмножеством M в $\mathbb{R}^d$ мы свяжем некоторое замкнутое выпуклое подмножество M° в $\mathbb{R}^d$, называемое полярой M . Если C – вы-

пуклый компакт, содержащий точку σ в своей внутренней, то его поляр C° обладает теми же свойствами и C служит полярной для C° . Для каждой такой пары взаимно полярных компактных выпуклых множеств, имеющих σ внутренней точкой, операция перехода к полярной индуцирует взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{E}(C)$ и $\mathcal{E}(C^\circ)$, обращающее отношение частичной упорядоченности.

Следует отметить, что, если в предыдущих §§ 2 – 5 мы имели дело с аффинными понятиями, то полярность – понятие линейное. В частности, операция взятия полярной не инвариантна относительно сдвигов.

Для данного подмножества M в $\mathbb{R}^d$ его полярная – это подмножество M° в $\mathbb{R}^d$, заданное соотношением

$$\begin{aligned} M^\circ &:= \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in M: \langle x, y \rangle \leq 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^d \mid \sup_{x \in M} \langle x, y \rangle \leq 1\}. \end{aligned}$$

Эквивалентное определение:

$$M^\circ = \bigcap_{x \in M} K(x, 1). \quad (1)$$

Так как y принадлежит $K(x, 1)$ тогда и только тогда, когда x принадлежит $K(y, 1)$, из (1) следует, что

$$y \in M^\circ \Leftrightarrow M \subset K(y, 1). \quad (2)$$

Из (1) также следует, что M° – замкнутое выпуклое множество, содержащее σ , так как этим свойством обладает каждое $K(x, 1)$. Далее, ясно, что

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_1^\circ \supset M_2^\circ. \quad (3)$$

Докажем следующий результат:

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть M – подмножество в $\mathbb{R}^d$.

- (a) Если M ограничено, то σ – внутренняя точка M° .
- (b) Если σ – внутренняя точка M , то M° ограничено.

Доказательство. Для $x \in \mathbb{R}^d$ и $r > 0$ обозначим через

$B(\bar{x}, z)$ замкнутый шар радиуса z с центром в $\bar{x}$:

$$B(\bar{x}, z) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - \bar{x}\| \leq z\}.$$

Здесь $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Как хорошо известно (и просто доказывается),

$$\sup_{x \in B(\sigma, z)} \langle x, y \rangle = z \|y\|$$

для всех $y \in \mathbb{R}^d$ и $z > 0$. Это показывает, что

$$B(\sigma, z)^0 = B(\sigma, z^{-1}). \quad (4)$$

Поэтому если M ограничено, т. е. $M \subset B(\sigma, z)$ для некоторого $z > 0$, то, в силу (3) и (4), $B(\sigma, z^{-1}) \subset M^0$, а значит, σ — внутренняя точка M^0 . Тем самым (а) доказано. Далее, если σ — внутренняя точка M , т. е. $B(\sigma, z) \subset M$ для некоторого $z > 0$, то, вновь используя (3) и (4), мы заключаем, что $M^0 \subset B(\sigma, z^{-1})$, т. е. M^0 ограничено. Этим доказано (b). $\square$

Конечно, операцию взятия поляр можно применить повторно. Вместо $(M^0)^0$ мы будем писать M^{00} . Множество M^{00} называется биполяр M . Биполяра допускает следующее описание:

ТЕОРЕМА 6.2. Для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$

$$M^{00} = \text{clconv}(\{\sigma \cup M\}),$$

т. е. M^{00} — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее σ и M .

Доказательство. Имеем

$$M^{00} = \bigcap_{y \in M^0} K(y, 1) = \bigcap_{M \subset K(y, 1)} K(y, 1) \quad (5)$$

(см. (1) и (2)). Из этой формулы немедленно следует, что M^{00} — выпуклое замкнутое множество, содержащее σ и M , а значит, M^{00} содержит $\text{clconv}(\{\sigma\} \cup M)$. Чтобы доказать обратное включение,

рассмотрим произвольную точку z , не принадлежащую $\text{clconv}(\{\sigma\} \cup M)$. Надо показать, что найдётся замкнутое полупространство $K(u, 1)$, содержащее M , но не содержащее z (см. (5)). В силу теоремы 4.5 существует опорное полупространство $K(y, \alpha)$ к $\text{clconv}(\{\sigma\} \cup M)$, такое что $z \notin K(y, \alpha)$. Тогда

$$\max \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \text{clconv}(\{\sigma\} \cup M) \} = \alpha < \langle z, y \rangle.$$

Поскольку σ принадлежит $\text{clconv}(\{\sigma\} \cup M)$, то $\alpha \geq 0$. Поэтому существует такое $\beta > 0$, что

$$\max \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \text{clconv}(\{\sigma\} \cup M) \} \leq \beta < \langle z, y \rangle. \quad (6)$$

Полагая $u := \beta^{-1} y$, получаем из (6)

$$\max \{ \langle x, u \rangle \mid x \in \text{clconv}(\{\sigma\} \cup M) \} \leq 1 < \langle z, u \rangle,$$

откуда и следует, что $M \subset K(u, 1)$ и $z \notin K(u, 1)$. $\square$

Из теорем 6.1 и 6.2 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Пусть C выпуклый компакт в $\mathbb{R}^d$, для которого σ является внутренней точкой. Тогда C° — тоже выпуклый компакт, имеющий σ своей внутренней точкой. Кроме того, $C^{\circ\circ} = C$.

Ниже мы считаем, что C — компактное выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющее условию $\sigma \in \text{int } C$. Чтобы подчеркнуть имеющую в этом случае место полную симметрию между C и C° (см следствие 6.3), будем обозначать C° через D .

Из предположения $\sigma \in \text{int } C$ следует, что каждая опорная гиперплоскость к C — собственная и имеет вид $H(y, 1)$ для некоторого единственного $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{\sigma\}$. Тогда $C \subset K(y, 1)$, а значит, $y \in D$. Следующая теорема содержит дальнейшие сведения об этой ситуации:

ТЕОРЕМА 6.4. Для каждого $y \in \mathbb{R}^d$ приводимые ниже два условия равносильны:

- (a) $H(y, 1)$ — опорная гиперплоскость к C ;
- (b) $y \in D$.

Точно также для каждого $x \in \mathbb{R}^d$ равносильны условия:

(с) $H(x, 1)$ — опорная гиперплоскость к D ;

(d) $x \in \text{bd } D$.

Доказательство. Если выполнено (а), то $y \in D$ и

$$\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = 1 \quad (7)$$

(на самом деле верхняя грань здесь достигается, т. е. вместо $\sup$ можно писать $\max$). Если бы $y \in \text{int } D$, то мы имели бы также $\lambda y \in D$ для некоторого $\lambda > 1$. Так как D — пол-
ляра C , откуда следовало бы, что

$$\sup_{x \in C} \langle x, \lambda y \rangle \leq 1,$$

а это противоречит (7). Значит, $y \in D \setminus \text{int } D = \text{bd } D$, т. е. выполнено (b).

Обратно, если выполнено (b), то, в частности, y принадле-
жит $D \setminus \{o\}$, откуда вытекает (так как D — пол-ляра C), что

$$0 < \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle \leq 1. \quad (8)$$

Если бы в (8) мы имели справа строгое неравенство, то для подхо-
дящего $\lambda > 1$ выполнялось бы равенство

$$\sup_{x \in C} \langle x, \lambda y \rangle = 1$$

и, значит, точка λy принадлежала бы $C^\circ (= D)$. Поскольку $o \in \text{int } D$ и $y \in]o, \lambda y[$, откуда, ввиду теоремы 3.3, следовало бы, что $y \in \text{int } D$, в противоречие с предположени-
ем. Поэтому

$$\sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = 1.$$

Наконец, в силу компактности C и непрерывности функции $\langle \cdot, y \rangle$ эта верхняя грань на самом деле достигается. Значит, $H(y, 1)$ — опорная гиперплоскость к C , т. е. выполнено (а).

Как уже отмечалось выше, C и D играют полностью симмет-

ричные роли. Поэтому равносильность (с) и (d) вытекает из равносильности (а) и (b). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ следующие четыре условия равносильны:

- (а) $H(y, 1)$ — опорная гиперплоскость к C в точке x ;
- (b) $H(x, 1)$ — опорная гиперплоскость к D в точке y ;
- (с) $\langle x, y \rangle = 1$, $x \in \text{bd } C$, $y \in \text{bd } D$;
- (d) $\langle x, y \rangle = 1$, $x \in C$, $y \in D$.

Доказательство. То что (а) $\Leftrightarrow$ (с), немедленно следует из равносильности условий (а) и (b) теоремы 6.4. Эквивалентность (b) $\Leftrightarrow$ (с) имеет место по симметрии (или ввиду равносильности условий (с) и (d) теоремы 6.4). Очевидно, что (с) $\Rightarrow$ (d). Мы завершим доказательство, установив импликацию (d) $\Rightarrow$ (а). Из включения $y \in D (= C^\circ)$ следует, что $C \subset K(y, 1)$, а из равенства $\langle x, y \rangle = 1$ — что $x \in H(y, 1)$. Так как $x \in C$, мы заключаем, что $H(y, 1)$ — опорная гиперплоскость к C в точке x . $\square$

Положим теперь для всякой выступающей грани F множества C (собственной или несобственной)

$$F^\Delta := \{y \in D \mid \forall x \in F: \langle x, y \rangle = 1\}.$$

Точно также для всякой выступающей грани G множества D положим

$$G^\Delta := \{x \in C \mid \forall y \in G: \langle x, y \rangle = 1\}.$$

Обоснованием для введения этих объектов служит тот факт, что если F — собственная выступающая грань C , то точка $y \in \mathbb{R}^d$ принадлежит F^Δ тогда и только тогда, когда $H(y, 1)$ — опорная гиперплоскость к C , содержащая $F \subset H(y, 1)$; это немедленно вытекает из равносильности условий (а) и (d) следствия 6.5. Аналогичное утверждение верно и для любой собственной выступающей грани G множества D . Для несобственных выступающих граней C и $\emptyset$ множества C мы имеем $C^\Delta = \emptyset$ и

$\phi^\Delta = D$, а для несобственных выступающих граней D и ϕ множества D имеем $D^\Delta = \phi$ и $\phi^\Delta = C$. (То прискорбное обстоятельство, что ϕ^Δ может иметь разные "значения", объясняется, конечно, тем, что мы использовали одно и то же обозначение для различных отображений.)

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть F — собственная выступающая грань множества C . Тогда F^Δ — собственная выступающая грань D . Аналогичное утверждение верно и для собственных выступающих граней G множества D .

Доказательство. В силу данного определения,

$$F^\Delta = \bigcap_{x \in F} D \cap H(x, 1).$$

Так как грань F — собственная, каждая точка $x \in F$ принадлежит $\text{bd } C$, а значит, $H(x, 1)$ — опорная гиперплоскость к D (импликация (d) $\Rightarrow$ (c) из теоремы 6.4). Поэтому каждое множество $D \cap H(x, 1)$ является собственной выступающей гранью D , а отсюда в силу теоремы 5.9 вытекает, что F^Δ — выступающая грань D . Далее, грань F^Δ — либо собственная, либо пустая. Но поскольку F — собственная выступающая грань, существует такая опорная гиперплоскость $H(y, 1)$ к C , что $F = C \cap H(y, 1)$. На основании замечания, сделанного после определения F^Δ , заключаем, что $y \in F^\Delta$, а значит, $F^\Delta \neq \emptyset$. $\square$

Теорема 6.6 показывает, что операцию Δ можно применять повторно. Условимся писать $F^{\Delta\Delta}$ вместо $(F^\Delta)^\Delta$. Очевидно, что для несобственных выступающих граней C и ϕ множества C мы имеем $C^{\Delta\Delta} = C$ и $\phi^{\Delta\Delta} = \phi$. Далее, в силу теоремы 6.6, $F^{\Delta\Delta}$ — собственная выступающая грань C , если F — собственная выступающая грань C . На самом деле справедлив следующий результат:

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть F — собственная выступающая грань C . Тогда $F^{\Delta\Delta} = F$. То же верно и для собственных выступающих граней G множества D .

Доказательство. По определению,

$$F^{\Delta\Delta} = \bigcap_{y \in F^{\Delta}} C \cap H(y, 1).$$

Поскольку y принадлежит F^{Δ} тогда и только тогда, когда $H(y, 1)$ — опорная гиперплоскость к C , содержащая F , мы видим, что $F^{\Delta\Delta}$ совпадает с пересечением всех собственных выступающих граней C , содержащих F . Но это пересечение есть, конечно, сама грань F . $\square$

Для всякой выступающей грани F множества C назовём выступающую грань F^{Δ} множества D гранью, сопряжённой с F ; аналогичное определение примем и для выступающих граней G множества D . Теоремы 6.6 и 6.7 показывают, что выступающие грани множеств C и D можно объединить в пары F, G взаимно сопряжённых граней, одновременно собственных или несобственных.

Ясно, что операция Δ обращает включения. Поэтому из теорем 6.6 и 6.7 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.8. Отображение $F \mapsto F^{\Delta}$, где $F \in \mathcal{E}(C)$, — антиизоморфизм решётки $(\mathcal{E}(C), \subset)$ на решётку $(\mathcal{E}(D), \subset)$, а отображение $G \mapsto G^{\Delta}$, где $G \in \mathcal{E}(D)$, — антиизоморфизм $(\mathcal{E}(D), \subset)$ на $(\mathcal{E}(C), \subset)$. Эти два отображения взаимно обратны.

Антиизоморфизмы решёток переводят $\inf$ в $\sup$ и наоборот. Поэтому из следствия 6.8 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.9. Пусть $\{F_i \mid i \in I\}$ — произвольное семейство выступающих граней множества C . Обозначим через F_0 наибольшую выступающую грань C , содержащуюся во всех F_i (т. е. F_0 — пересечение F_i), а через F_1 — наименьшую выступающую грань C , содержащую все F_i . Тогда F_0^{Δ} — наименьшая выступающая грань D , содержащая все F_i^{Δ} , а F_1^{Δ} — наибольшая выступающая грань D , содержащаяся во всех F_i^{Δ} (т. е. F_1^{Δ} — пересечение F_i^{Δ}). Подобное утверждение справедливо и для семейства выступающих граней множества D .

Напомним, что уже некоторое время мы проводим наши рассуждения при общем предположении, что C и D — взаимно полярные

выпуклые компакты в $\mathbb{R}^d$, имеющие σ своей внутренней точкой. Это предположение сохраняется и в следующей теореме. (В частности, можно не объяснять, что означает символ d в приводимой ниже формуле.)

ТЕОРЕМА 6.10. Пусть F и G — взаимно сопряжённые грани множеств C и D соответственно. Тогда

$$\dim F + \dim G \leq d - 1.$$

Доказательство. Грань, сопряжённая с несобственной выступающей гранью $\emptyset$ множества C , — это несобственная выступающая грань D множества D , а для несобственной выступающей грани C множества C сопряжённой гранью является выступающая грань $\emptyset$ множества D . Так как $\dim \emptyset = -1$, $\dim C = d$ и $\dim D = d$, то ясно, что в случае, когда грань F — несобственная, наша формула выполнена, и притом со знаком равенства. Остаётся рассмотреть случай, когда F — собственная выступающая грань C ; тогда сопряжённая с ней грань G множества D — также собственная (в силу теоремы 6.6). Но по определению операции Δ

$$G = D \cap \bigcap_{x \in F} H(x, 1).$$

Значит, G — подмножество аффинного подпространства $\bigcap_{x \in F} H(x, 1)$, а потому

$$\dim G \leq \dim \bigcap_{x \in F} H(x, 1). \quad (9)$$

В силу (9) аффинное подпространство $\bigcap_{x \in F} H(x, 1)$ непусто; следовательно, оно представляет собой сдвиг линейного подпространства $\bigcap_{x \in F} H(x, 0)$, и

$$\dim \bigcap_{x \in F} H(x, 1) = \dim \bigcap_{x \in F} H(x, 0). \quad (10)$$

Но

$$\begin{aligned} \bigcap_{x \in F} H(x, 0) &= \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in F: \langle x, y \rangle = 0\} \\ &= F^\perp = (\text{span } F)^\perp. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \dim \bigcap_{x \in F} H(x, 0) &= \dim ((\text{span } F)^\perp) \\ &= d - \dim (\text{span } F) = d - \dim(\text{aff } F) + 1 \\ &= d - 1 - \dim (\text{aff } F) = d - 1 - \dim F \quad (11) \end{aligned}$$

(равенство $\dim (\text{span } F) = \dim (\text{aff } F) + 1$ справедливо, поскольку $\sigma \notin \text{aff } F$). Сопоставляя (9), (10) и (11), получаем нужную формулу.

У п р а ж н е н и я

6.1. Докажите, что $(\lambda M)^0 = \lambda^{-1} M^0$ при $\lambda \neq 0$.

6.2. Докажите, что $(M^{00})^0 = M^0$.

6.3. Докажите, что $(\bigcup_{i \in I} M_i)^0 = \bigcap_{i \in I} M_i^0$.

6.4. Докажите, что

$$\left(\bigcap_{i \in I} C_i \right)^0 = \text{clconv} \bigcup_{i \in I} C_i^0,$$

если все C_i — замкнутые выпуклые множества, содержащие σ .

6.5. Для $e < d$ отождествим $\mathbb{R}^e$ с подпространством в $\mathbb{R}^d$, состоящим из всех $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ с $x_{e+1} = \dots = x_d = 0$. Обозначим через Π ортогональную проекцию $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{R}^e$. Докажите, что для любого подмножества M в $\mathbb{R}^d$

$$\Pi(M)^0 = M^0 \cap \mathbb{R}^e,$$

где $\Pi(M)^0$ обозначает полярность множества $\Pi(M)$ в $\mathbb{R}^e$, а M^0 — полярность M в $\mathbb{R}^d$.

6.6. Пусть C и D — взаимно полярные выпуклые компакты, F — собственная выступающая грань C и $G := F^\Delta$. Докажите, что

$$G = D \cap \bigcap_{x \in \text{ext} F} H(x, 1),$$

а также что

$$G = D \cap H(x_0, 1)$$

для любой относительно-внутренней точки x_0 множества F .

6.7. Пусть C и D – взаимно полярные выпуклые компакты. Расширим определение операции Δ , допустив в качестве объектов её действия произвольные подмножества множеств C и D .

Докажите, что для любого подмножества M в C множество $M^{\Delta\Delta} := (M^{\Delta})^{\Delta}$ представляет собой наименьшую выступающую грань C , которая содержит M .

ГЛАВА 2

Выпуклые многогранники

§ 7. МНОГОГРАННИКИ

Многогранник (выпуклый) – это выпуклая оболочка непустого конечного множества (см. § 2). Мы уже знаем, что многогранники – компакты. Поэтому результаты § 5 о гранной структуре замкнутых выпуклых множеств применимы и к многогранникам. При этом, как и следовало ожидать, гранная структура многогранников оказывается значительно проще, чем гранная структура произвольных выпуклых множеств.

Многогранник $P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\}$ называется k -многогранником, если $\dim P = k$. Это означает, что некоторое подсемейство семейства $(x_1, \dots, x_n)$, состоящее из $k+1$ точек, аффинно-независимо, но любое подсемейство, состоящее из $k+2$ точек, уже аффинно-зависимо. Под k -симплексом мы понимаем k -многогранник, являющийся симплексом. Симплекс является k -симплексом тогда и только тогда, когда он имеет $k+1$ вершин (см. § 2), так что 1-симплекс – это отрезок, 2-симплекс – треугольник, 3-симплекс – тетраэдр.

В терминах крайних точек многогранники можно описать следующим образом:

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть P — непустое подмножество в $\mathbb{R}^d$. Следующие условия равносильны:

- (а) P — многогранник;
- (б) P — компактное выпуклое множество с конечным числом крайних точек.

Доказательство. Если P — многогранник, т. е. $P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\}$, то (по следствию 2.9) P — компакт. Далее, импликация (а) $\Rightarrow$ (б) из теоремы 5.10 показывает, что $\text{ext } P$ — подмножество множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ и, следовательно, конечное множество. Обратное утверждение немедленно вытекает из импликации (б) $\Rightarrow$ (а) теоремы 5.10.

Начиная с этого места будем, как это общепринято, называть крайние точки многогранника, т. е. его 0-границы, вершинами (множество всех вершин данного многогранника P , как и раньше, будем обозначать $\text{ext } P$), а 1-границы — рёбрами.

Вершины симплекса S в смысле § 2 — это как раз его крайние точки (т. е. вершины в обычном смысле). Это сразу вытекает из теоремы 5.10 или теоремы 7.2 (см. ниже).

Множество $\{x_1, \dots, x_n\}$, порождающее данный многогранник $P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\}$, разумеется, не единственно (за исключением случая, когда P состоит из одной точки); в самом деле, в это множество всегда можно добавить новые точки $x_{n+1}, \dots$, лежащие в P . Однако, как показывает следующее утверждение, существует единственное минимальное множество, порождающее многогранник P , — это $\text{ext } P$, множество вершин P .

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^d$ и $\{x_1, \dots, x_n\}$ — произвольное конечное подмножество в P . Следующие условия равносильны:

- (а) $P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\}$;
- (б) $\text{ext } P \subset \{x_1, \dots, x_n\}$.

В частности,

- (с) $P = \text{conv} (\text{ext } P)$.

Доказательство. Это немедленно вытекает из теоремы 5.10, так как многогранники компактны. $\square$

Теперь займёмся изучением гранной структуры многогранников общего вида.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^d$ и F — его собственная грань. Тогда F также является многогранником и $\text{ext } F = F \cap \text{ext } P$.

Доказательство. Прежде всего, в силу теоремы 5.1 и импликации (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 7.1, множества P и F компактны. Далее, теорема 5.2 показывает, что множество крайних точек F в точности совпадает с множеством тех крайних точек (вершин) P , принадлежащих F , т. е. $\text{ext } F = F \cap \text{ext } P$. Так как (в силу импликации (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 7.1) $\text{ext } P$ — конечное множество, то и $\text{ext } F$ тоже конечное множество, и применение импликации (b) $\Rightarrow$ (a) из теоремы 7.1 завершает доказательство. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 7.4. У всякого многогранника P в $\mathbb{R}^d$ число граней конечно.

Доказательство. Ввиду импликации (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 7.1 число крайних точек P конечно. В силу теоремы 7.3 и утверждения (c) теоремы 7.2 каждая грань P представляет собой выпуклую оболочку крайних точек P . Следовательно, число граней конечно. $\square$

Следующая теорема — главный результат этого параграфа:

ТЕОРЕМА 7.5. У каждого многогранника P в $\mathbb{R}^d$ все грани являются выступающими.

Доказательство. Достаточно установить наше утверждение для d -многогранников в $\mathbb{R}^d$. Проведём индукцию по d . Для $d=0$ доказывать нечего, для $d=1$ утверждение тривиально, а для $d=2$ очевидно. Предположим, что доказываемое утверждение справедливо для всех многогранников размерности $< d$, где $d \geq 3$, и рассмотрим произвольный d -многогранник P в $\mathbb{R}^d$. Для несобственных граней P доказывать нечего, поэтому пусть F — собственная грань P (рис. 3). Пусть x —

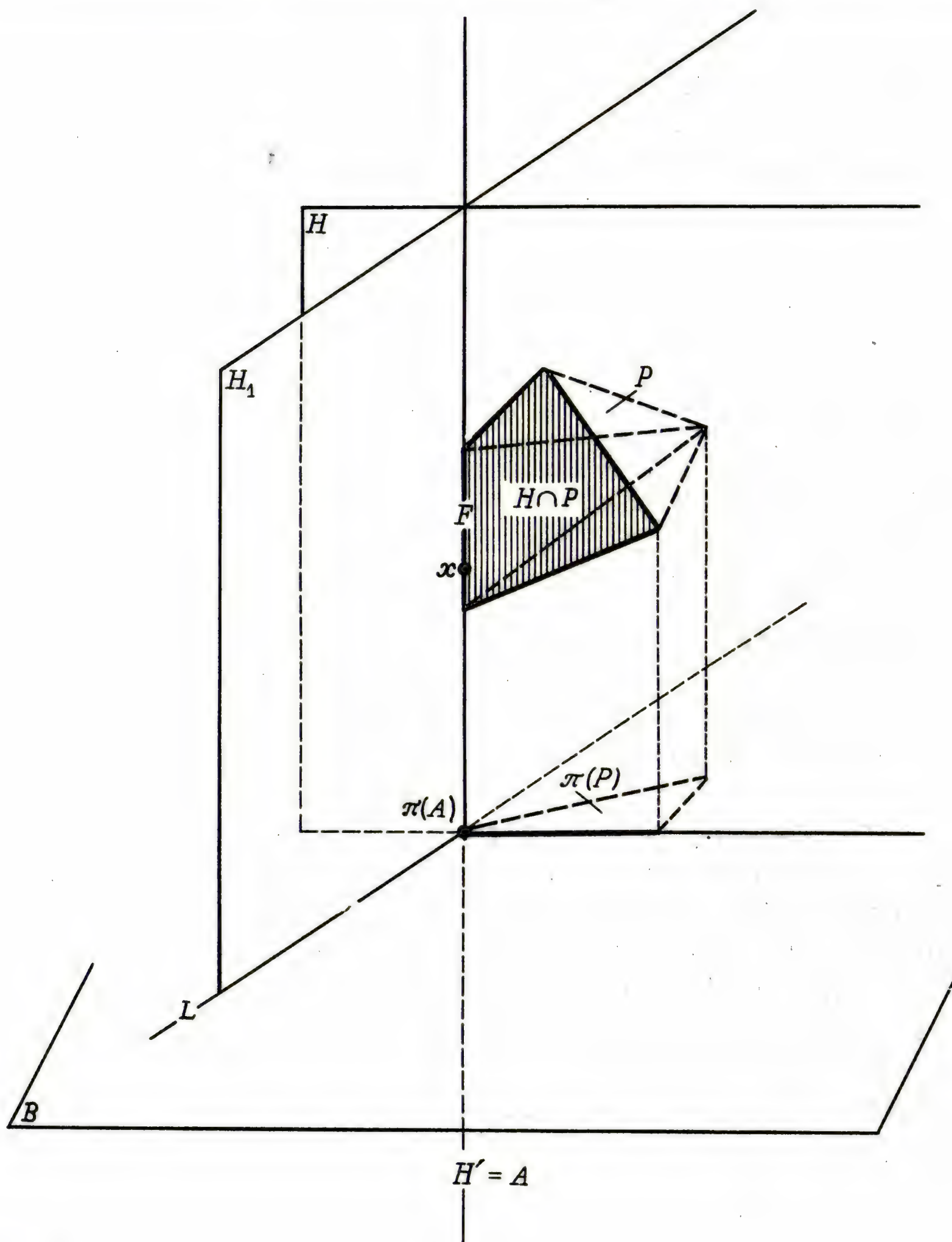


Рис. 3

относительно-внутренняя точка F (см. теорему 3.1) и H — собственная опорная гиперплоскость к P в точке x (см. теорему 4.3). Тогда $H \cap P$ — собственная выступающая грань P , содержащая x . В силу теоремы 5.6, $F \subset H \cap P$. Если $F = H \cap P$, то грань F — выступающая, как и нужно. Если $F \subsetneq H \cap P$, то

F – собственная грань $H \cap P$, по теореме 5.2. Поскольку $\dim(H \cap P) < d$ и $H \cap P$ – многогранник (теорема 7.3), то по предположению индукции в $\text{aff}(H \cap P)$ существует собственная опорная гиперплоскость H' к $H \cap P$, такая что $F = H' \cap (H \cap P)$. Эту гиперплоскость H' можно расширить до такой гиперплоскости A в H , что

$$F = A \cap P. \quad (1)$$

Заметим, что $\dim A = d - 2 \neq 1$. Пусть B – двумерное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$, ортогональное к A , и π обозначает ортогональную проекцию $\mathbb{R}^d$ на B . Тогда $\pi(A)$ – однотоочечное множество. Далее, $\pi(P)$ есть 2-многогранник в B . Мы утверждаем, что $\pi(A)$ – вершина $\pi(P)$. В самом деле, если бы это было не так, то в P нашлись бы такие точки y и z , что $\pi(y) \neq \pi(z)$ и

$$\pi(A) = (1 - \lambda)\pi(y) + \lambda\pi(z)$$

для некоторого $\lambda \in]0, 1[$. Положим

$$u := (1 - \lambda)y + \lambda z.$$

Тогда u принадлежит P и $\pi(u) = \pi(A)$, а значит, u принадлежит A , поскольку $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Поэтому u принадлежит F (см. (1)). Так как F – грань P , мы заключаем, что y и z принадлежат F . Но F – подмножество A , и, следовательно, $\pi(v) = \pi(A)$ для всех $v \in F$. В частности, $\pi(y) = \pi(z)$. Мы пришли к противоречию, которое показывает, что $\pi(A)$ является вершиной $\pi(P)$. В силу справедливости двумерного варианта теоремы, в B существует такая прямая L , что

$$L \cap \pi(P) = \pi(A).$$

Тогда

$$H_1 := \text{aff}(A \cup L) = \pi^{-1}(L)$$

будет опорной гиперплоскостью к P в $\mathbb{R}^d$ с $H_1 \cap P = F$, как нам и надо. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 7.6. Для всякого многогранника P в $\mathbb{R}^d$. Решётки $(\mathcal{F}(P), \subset)$ и $(\mathcal{E}(P), \subset)$ совпадают.

Введём теперь два специальных класса многогранников – пирамиды и бипирамиды – и опишем их гранную структуру.

Пирамида в $\mathbb{R}^d$ – это многогранник (см. утверждение (а) следующей теоремы) вида

$$P = \text{conv}(Q \cup \{x_0\}),$$

где Q – многогранник в $\mathbb{R}^d$, называемый основанием P , а

x_0 – точка в $\mathbb{R}^d \setminus \text{aff } Q$, называемая вершиной¹ P .

(Заметим, что основание и вершина пирамиды определены, вообще говоря, не единственным образом; скажем, симплекс представляет собой пирамиду, для которой в качестве основания можно взять любую грань, или, что то же самое, в качестве вершины (пирамиды) можно взять любую вершину (симплекса).) Пирамида P называется e -пирамидой, если $\dim P = e$. Ясно, что пирамида P тогда и только тогда является e -пирамидой, когда её основанием служит $(e-1)$ -многогранник.

Гранная структура пирамиды определяется гранной структурой её основания:

ТЕОРЕМА 7.7. Пусть P – пирамида в $\mathbb{R}^d$ с основанием Q и вершиной x_0 . Справедливы следующие утверждения:

- (а) P – многогранник с $\text{ext } P = (\text{ext } Q) \cup \{x_0\}$;
- (б) подмножество F пирамиды P , не содержащее x_0 , тогда и только тогда представляет собой грань P , когда оно служит гранью Q ;
- (с) подмножество F пирамиды P , содержащее x_0 , тогда и только тогда является гранью P , когда существует такая грань G основания Q , что $F = \text{conv}(G \cup \{x_0\})$, т. е. либо $F = \{x_0\}$, либо же F есть пирамида с основанием G и вершиной x_0 ; для каждой такой грани F пирамиды P грань G единственна и $\dim G = \dim F - 1$.

¹ Заметим, что в оригинале для вершины многогранника используется термин *vertex*, а для вершины пирамиды – *арех*. – Прим. ред.

Доказательство. (а) Множество

$$P_1 := \text{conv} ((\text{ext } Q) \cup \{x_0\})$$

выпукло и содержит Q и x_0 (см. утверждение (с) теоремы 7.2). Значит, оно содержит и P . С другой стороны, ясно, что $P_1 \subset P$, откуда

$$P = \text{conv} ((\text{ext } Q) \cup \{x_0\}).$$

Это доказывает, что P — многогранник, а также что

$$\text{ext } P \subset (\text{ext } Q) \cup \{x_0\}$$

(см. импликацию (а) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 7.2). Чтобы установить обратное включение, заметим прежде всего, что P совпадает с объединением всех отрезков вида $[y, x_0]$, где $y \in Q$. Отсюда видно, что если H_0 — гиперплоскость со свойствами $x_0 \in H_0$ и $H_0 \cap \text{aff } Q = \emptyset$, то H_0 — опорная гиперплоскость к P , причём $H_0 \cap P = \{x_0\}$, откуда следует, что $x_0 \in \text{ext } P$. Осталось доказать, что любая точка $x \in \text{ext } Q$ принадлежит $\text{ext } P$. Покажем, что вообще каждая собственная грань основания Q будет и гранью P . Пусть F — собственная грань Q . Тогда в $\text{aff } Q$ существует опорная к Q гиперплоскость H , такая что $H \cap Q = F$. Пусть H_1 — такая гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, что $H_1 \cap \text{aff } Q = H$, причём точка x_0 расположена с той же стороны от H_1 , что и $Q \setminus F$. Тогда, вновь используя сделанное выше замечание о том, что каждая точка P принадлежит некоторому отрезку вида $[y, x_0]$, где $y \in Q$, мы видим, что $H_1 \cap P = F$, откуда следует, что F — грань P . Этим доказательство утверждения (а) завершено. [Более прямой путь доказательства того, что любая (собственная) грань Q является гранью P , — воспользоваться тем наблюдением, что Q — гипергрань P . Мы предпочли данное выше доказательство потому, что после простой модификации оно становится применимым к ситуации, которая возникает ниже при доказательстве теоремы 7.8.]

(b) При доказательстве утверждения (а) было установлено, что каждая собственная грань основания Q является гранью P . Поскольку и само Q — грань (на самом деле гипергрань) P , мы видим, что каждая грань Q служит также гранью P .

Обратно, пусть F — непустая грань P , которая не со-

держит x_0 . По теореме 7.5 найдётся опорная к P гиперплоскость H , такая что $H \cap P = F$. В силу (а) и теоремы 7.3, $\text{ext } F \subset \text{ext } Q$, а значит, $F \subset Q$. Но тогда очевидно, что F — грань Q .

(с) Сначала докажем, что любое множество F вида

$$F = \text{conv } (G \cup \{x_0\}),$$

где G — грань Q , служит гранью P . Достаточно рассмотреть случай, когда G — собственная грань Q . Для любой такой грани G найдётся опорная к Q гиперплоскость H в $\text{aff } Q$, удовлетворяющая условию $H \cap Q = G$. Пусть H_1 — такая гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, что $H_1 \cap \text{aff } Q = H$ и $x_0 \in H_1$. Ясно, что H_1 — собственная опорная гиперплоскость к P и, значит,

$$F_1 := H_1 \cap P$$

— собственная (выступающая) грань P . Далее,

$$\begin{aligned} \text{ext } F_1 &= H_1 \cap \text{ext } P \\ &= (H \cap \text{ext } Q) \cup \{x_0\} \\ &= (\text{ext } G) \cup \{x_0\} \end{aligned}$$

(мы воспользовались теоремой 7.3 и утверждением (а)). Поэтому, в силу утверждения (с) теоремы 7.2,

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{conv } ((\text{ext } G) \cup \{x_0\}) \\ &= \text{conv } (G \cup \{x_0\}) = F \end{aligned}$$

и, следовательно, F — грань P , что и требовалось установить.

Чтобы доказать обратное, достаточно рассмотреть случай, когда $F \neq \{x_0\}$ и $F \neq P$. Пусть H — опорная гиперплоскость к P , такая что $F = H \cap P$ (см. теорему 7.5). Так как P совпадает с объединением всех отрезков $[y, x_0]$, где $y \in Q$, мы видим, что F — объединение всех отрезков $[y, x_0]$, где $y \in H \cap Q$. Полагая $G := H \cap Q$, получаем

$$F = \text{conv } (G \cup \{x_0\}),$$

и ясно, что G — грань Q .

Наконец, единственность грани G и формула для её размерности очевидны. $\square$

Бипирамида в $\mathbb{R}^d$ — это многогранник (см. утверждение (а) приводимой ниже теоремы 7.8) вида

$$P = \text{conv} (Q \cup \{x_0, x_1\}),$$

где Q — многогранник в $\mathbb{R}^d$ с $\dim Q \geq 1$, а x_0, x_1 — такие две точки из $\mathbb{R}^d \setminus \text{aff} Q$, что

$$]x_0, x_1[\cap \text{ri } Q \neq \emptyset$$

(тогда на самом деле интервал $]x_0, x_1[$ имеет с $\text{ri } Q$ в точности одну общую точку). Множество Q называется основанием бипирамиды P , а x_0, x_1 — её вершинами P . (Как и в случае пирамиды, основание и вершины определены, вообще говоря, не единственным образом.) Бипирамида P называется k -бипирамидой, если $\dim P = k$. Ясно, что бипирамида P тогда и только тогда является k -бипирамидой, когда её основанием служит $(k-1)$ -многогранник.

Гранная структура бипирамиды описывается так:

ТЕОРЕМА 7.8. Пусть P — бипирамида в $\mathbb{R}^d$ с основанием Q и вершинами x_0, x_1 . Справедливы следующие утверждения:

- (а) P — многогранник с $\text{ext } P = (\text{ext } Q) \cup \{x_0, x_1\}$;
- (б) подмножество F бипирамиды P , не содержащее ни одной из точек x_0, x_1 , тогда и только тогда служит гранью P , когда F — грань Q , отличная от Q ;
- (с) подмножество F бипирамиды P , содержащее x_0 , но не содержащее x_1 , тогда и только тогда является гранью P , когда найдётся такая грань G основания Q , отличная от Q , что $F = \text{conv} (G \cup \{x_0\})$, т. е. или $F = \{x_0\}$, или же F есть пирамида с основанием G и вершиной x_0 ; для любой такой грани F бипирамиды P грань G единственна и $\dim G = \dim F - 1$;
- (d) подмножество F бипирамиды P , содержащее обе точки $x_0, x_1 \in F$, тогда и только тогда является гранью P , когда $F = P$.

Доказательство следует тому же пути, что и доказательство теоремы 7.7. Подробности предоставим читателю. $\square$

У п р а ж н е н и я

- 7.1. Докажите, что каждый многогранник P с n вершинами совпадает с ортогональной проекцией некоторого $(n-1)$ -симплекса. [Это следует понимать так: надо "вложить" P в $\mathbb{R}^{n-1}$ и построить $(n-1)$ -симплекс в $\mathbb{R}^{n-1}$, ортогональная проекция которого на $\text{aff } P$ совпадает с P .]
- 7.2. Пусть $1 \leq n \leq d$. Отправляясь от заданного $(d-n)$ -многогранника Q в $\mathbb{R}^d$, можно последовательно построить пирамиды $P_1, P_2, \dots, P_n$, взяв в качестве P_1 какую-либо $(d-n+1)$ -пирамиду с основанием Q , в качестве P_2 — какую-либо $(d-n+2)$ -пирамиду с основанием P_1 , и т. д. Заключительная d -пирамида P_n называется n -кратной d -пирамидой с основанием Q . Докажите, что любая $(d-1)$ -кратная d -пирамида является также и d -кратной d -пирамидой; на самом деле это d -симплекс.
- 7.3. По образцу упр. 7.2 определите понятие n -кратной d -бипирамиды. Докажите, что любая $(d-1)$ -кратная d -бипирамида является также и d -кратной d -бипирамидой.
[Частный случай d -кратных d -бипирамид — это так называемые крестовые d -многогранники, т. е. множества, представимые в виде выпуклой оболочки $2d$ точек $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d$, таких что все отрезки $[a_i, b_i]$ имеют общую середину и ни один из отрезков $[a_i, b_i]$ не содержится в аффинной оболочке отрезков $[a_1, b_1], \dots, [a_{i-1}, b_{i-1}]$. Если все отрезки $[a_i, b_i]$ взаимно ортогональны и имеют одну и ту же длину, то говорят, что соответствующий крестовый d -многогранник регулярен. Трёхмерные крестовые многогранники называют октаэдрами.]
- 7.4. Призма в $\mathbb{R}^d$ — это многогранник вида

$$P = \text{conv}(Q \cup (a + Q)),$$

где Q — многогранник в $\mathbb{R}^d$ с $\dim Q < d$ и $a + Q \not\subset \text{aff } Q$. Докажите, что данное определение эквивалентно следующему: призма в $\mathbb{R}^d$ — это многогранник вида

$$P = Q + [\tau, a],$$

где Q — многогранник в $\mathbb{R}^d$ с $\dim Q < d$, а a —

такая точка в $\mathbb{R}^d \setminus \{\sigma\}$, что прямая, проходящая через σ и a , не параллельна $\text{aff } Q$.

Докажите, что

$$\text{ext } P = \text{ext } Q \cup \text{ext } (a + Q).$$

Докажите, далее, что грани P — это грани многогранников Q и $a + Q$ и грани призм вида

$$F = \text{conv } (G \cup (a + G)),$$

где G — грань Q .

7.5. По образцу упр. 7.2 определите понятие n -кратной d -призмы. Докажите, что любая $(d-1)$ -кратная d -призма является и d -кратной d -призмой.

[d -кратные d -призмы называют d -параллелепипедами; иначе говоря, d -параллелепипеды — это многогранники вида

$$a + [\sigma, b_1] + \dots + [\sigma, b_d],$$

где b_i не содержится в аффинной оболочке множества $a + [\sigma, b_1] + \dots + [\sigma, b_{i-1}]$. Если все отрезки $[\sigma, b_i]$ попарно ортогональны и имеют одинаковую длину, то соответствующий d -параллелепипед называется d -кубом.]

§ 8. ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

В предыдущих параграфах мы установили, что каждый выпуклый компакт C допускает "внешнее представление" — в виде пересечения замкнутых полупространств, а именно своих опорных полупространств, а также "внутреннее представление" — в виде выпуклой оболочки некоторого (единственного) минимального множества, а именно множества своих крайних точек. (На самом деле для существования внешнего представления компактность не требуется, достаточно замкнутости.) Множества, обладающие "конечным внутренним представлением", — это многогранники. В данном параграфе мы изучим множества, которые имеют "конечное внешнее представление", т. е. представимы в виде пересечения конечных наборов замкнутых полупространств. Такие множества называются полиэдральными. Фундаментальный факт

теории многогранников составляет утверждение о том, что многогранники — это в точности непустые ограниченные полиэдральные множества. В одну сторону мы докажем это утверждение в настоящем параграфе, в другую — в следующем.

Подмножество Q в $\mathbb{R}^d$ называется полиэдральным множеством, если оно представимо в виде пересечения конечного числа замкнутых полупространств или же совпадает с $\mathbb{R}^d$.

Каждая гиперплоскость H в $\mathbb{R}^d$ есть пересечение двух замкнутых полупространств с границей H , а каждое аффинное подпространство A в $\mathbb{R}^d$, отличное от $\mathbb{R}^d$, представимо в виде пересечения конечного числа гиперплоскостей. Поэтому каждое аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$ является полиэдральным множеством.

Пусть Q — полиэдральное множество в $\mathbb{R}^d$, и пусть A — аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$, такое что $Q \subset A \neq \mathbb{R}^d$. Тогда Q представимо в виде пересечения конечного числа замкнутых подпространств в A либо же совпадает с A . Это следует из того факта, что если K — замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^d$, для которого $A \cap K \neq \emptyset$, то $A \cap K$ является замкнутым полупространством в A либо же совпадает с A .

Обратно, пусть A — аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$, причём $A \neq \mathbb{R}^d$, и пусть Q — подмножество в A , являющееся пересечением конечного числа замкнутых полупространств в A или совпадающее с A . Тогда Q представимо в виде пересечения конечного набора замкнутых полупространств в $\mathbb{R}^d$ и, следовательно, полиэдрально. Это вытекает из того, что каждое замкнутое полупространство K в A можно представить в виде $A \cap K' = K$, где K' — замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^d$.

Всякое полиэдральное множество замкнуто и выпукло. Пересечение конечного числа полиэдральных множеств также полиэдрально. Любой сдвиг полиэдрального множества — полиэдральное множество.

Обсудим гранную структуру (непустого) полиэдрального множества Q в $\mathbb{R}^d$. Если Q — аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$, то она тривиальна — единственными гранями являются $\emptyset$ и Q . Если Q есть e -мерное полиэдральное множество в $\mathbb{R}^d$, не являющееся аффинным подпространством, то Q аффинно изоморфно некоторому полиэдральному множеству Q' в $\mathbb{R}^e$ с $\dim Q' = e$, отличному от $\mathbb{R}^e$. Поэтому при исследовании свойств граней по-

лиэдральных множеств достаточно рассматривать полиэдральные множества Q в $\mathbb{R}^d$, такие что $\dim Q = d$ и $Q \neq \mathbb{R}^d$.

Каждое полиэдральное множество Q в $\mathbb{R}^d$ представимо в виде

$$Q = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, a_i). \quad (1)$$

Ниже, говоря о представлении (1) множества Q , мы будем всегда подразумевать, что никакие два множества $K(x_i, a_i)$ не совпадают друг с другом. При $Q \neq \mathbb{R}^d$ всегда можно считать, что каждое $K(x_i, a_i)$ является замкнутым полупространством, т. е. ни одно x_i не равно 0. Для $Q = \mathbb{R}^d$ представление (1) единственно, а именно $Q = K(0, \alpha)$, где $\alpha \geq 0$. Отметим, что при $Q \neq \mathbb{R}^d$ имеется бесконечно много представлений (если только $d \neq 0$) — всегда можно добавить новые замкнутые полупространства, содержащие Q .

Будем называть представление (1) неприводимым, если $n = 1$ или $n > 1$ и

$$Q \not\subseteq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K(x_i, a_i), \quad j = 1, \dots, n.$$

Представления, не являющиеся неприводимыми, будем называть приводимыми. Ясно, что каждое приводимое представление можно сделать неприводимым, опустив некоторые из множеств $K(x_i, a_i)$. Приводимая ниже теорема 8.2 показывает, что, за исключением случая аффинных пространств, для каждого полиэдрального множества Q существует только одно неприводимое представление.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть Q — полиэдральное множество в $\mathbb{R}^d$, причём $\dim Q = d$ и $Q \neq \mathbb{R}^d$, и пусть задано его представление

$$Q = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, a_i),$$

где $n > 1$ и каждое из $K(x_i, a_i)$ является замкнутым полупространством. Это представление неприводимо в том и только том

случае, если

$$H(x_j, \alpha_j) \cap \operatorname{int} \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K(x_i, \alpha_i) \neq \emptyset$$

для любого $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Для $j = 1, \dots, n$ положим

$$M_j := \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K(x_i, \alpha_i).$$

Ясно, что $Q = K(x_j, \alpha_j) \cap M_j$ для любого j , и поскольку по предположению $\dim Q = d$, то $\operatorname{int} M_j \neq \emptyset$; следовательно, $\operatorname{ri} M_j = \operatorname{int} M_j$ и $M_j \not\subset H(x_j, \alpha_j)$.

Условие теоремы означает, что

$$H(x_j, \alpha_j) \cap \operatorname{int} M_j \neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

В силу теоремы 4.1 и проведённых выше рассуждений, соотношения (2) эквивалентны следующим:

$$M_j \not\subset K(x_j, \alpha_j), \quad M_j \not\subset K(-x_j, -\alpha_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Но соотношения $M_j \not\subset K(-x_j, -\alpha_j), j = 1, \dots, n$, выполнены автоматически: если допустить, что $M_j \subset K(-x_j, -\alpha_j)$, то мы получим

$$Q \subset K(x_j, \alpha_j) \cap K(-x_j, -\alpha_j) = H(x_j, \alpha_j),$$

что невозможно¹. Следовательно, условие (3) эквивалентно следующему:

$$M_j \not\subset K(x_j, \alpha_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Но (4) – это просто переформулировка условия неприводимости. $\square$

¹ Так как $\dim Q = d$. – Прим. ред.

Следующая теорема показывает, что граница полиэдрального множества устроена так, как и можно было ожидать:

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть Q — полиэдральное множество в $\mathbb{R}^d$, причём $\dim Q = d$ и $Q \neq \mathbb{R}^d$, и пусть задано его представление

$$Q = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, \alpha_i), \quad (*)$$

где каждое из $K(x_i, \alpha_i)$ является замкнутым полупространством. Тогда

- (a) $\text{bd } Q = \bigcup_{i=1}^n H(x_i, \alpha_i) \cap Q$;
- (b) каждая гипергрань множества Q имеет вид $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$;
- (c) для того чтобы каждое из множеств $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ было гипергранью Q , необходимо и достаточно, чтобы представление $(*)$ было неприводимо.

Доказательство. (a) Имеем

$$\begin{aligned} \text{int } Q &= \text{int } \bigcap_{i=1}^n K(x_i, \alpha_i) = \bigcap_{i=1}^n \text{int } K(x_i, \alpha_i) \\ &= \bigcap_{i=1}^n K(x_i, \alpha_i) \setminus H(x_i, \alpha_i), \end{aligned}$$

откуда и следует (a).

(b) Пусть F — гипергрань Q , и пусть x — точка из относительной внутренней F . Тогда F — наименьшая грань Q , содержащая x (теорема 5.6). В силу (a) существует такое j , что

$$x \in H(x_j, \alpha_j) \cap Q.$$

Но тогда

$$F \subset H(x_j, \alpha_j) \cap Q,$$

откуда следует, что

$$F = H(x_j, \alpha_j) \cap Q$$

(см. следствие 5.5).

(c) Для $n=1$ доказывать ничего не надо. Поэтому будем считать, что $n > 1$.

Если представление $(*)$ неприводимо, то каждая из гиперплоскостей $H(x_j, \alpha_j)$ является опорной для Q , откуда вытекает, что $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ — собственная грань Q . Докажем, что $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ имеет непустую внутренность в $H(x_j, \alpha_j)$;

отсюда будет следовать, что $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ — гипергрань. Имеем

$$\begin{aligned} H(x_j, \alpha_j) \cap Q &= H(x_j, \alpha_j) \cap \bigcap_{i=1}^n K(x_i, \alpha_i) \\ &= H(x_j, \alpha_j) \cap \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K(x_i, \alpha_i) \\ &\supset H(x_j, \alpha_j) \cap \text{int} \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K(x_i, \alpha_i) \neq \emptyset \end{aligned}$$

(см. теорему 8.1). Поскольку множество

$$H(x_j, \alpha_j) \cap \text{int} \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K(x_i, \alpha_i)$$

открыто в $H(x_j, \alpha_j)$, приходим к требуемому заключению.

Обратно, если представление $(*)$ приводимо, то

$$Q = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K(x_i, \alpha_i) \quad (5)$$

для некоторого j . Допустим, что $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ — гипергрань Q . Применяя к множеству (5) утверждение (b), видим, что тогда для некоторого i , отличного от j ,

$$H(x_j, \alpha_j) \cap Q = H(x_i, \alpha_i) \cap Q.$$

Однако отсюда следует, что

$$K(x_j, \alpha_j) = K(x_i, \alpha_i).$$

Мы пришли к противоречию. Значит, $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ не является гипергранью Q , чем теорема и доказана. $\square$

Эта теорема показывает, что большинство полиэдральных мно-

жеств имеет гиперграни: единственное исключение составляют аффинные подпространства.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть F — собственная грань полиэдрального множества Q в $\mathbb{R}^d$. Тогда у Q существует гипергрань G , содержащая F .

Доказательство. Можно считать, что $\dim Q = d$. Выберем какое-нибудь неприводимое представление

$$Q = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, \alpha_i).$$

Пусть x — точка из относительной внутренней F . В силу утверждения (а) теоремы 8.2 найдётся такое j , что

$$x \in H(x_j, \alpha_j) \cap Q.$$

Пусть теперь F — наименьшая грань, содержащая x (см. теорему 5.6), и $H(x_j, \alpha_j) \cap Q$ — гипергрань, содержащая x (см. утверждение (с) теоремы 8.2). Полагая

$$G := H(x_j, \alpha_j) \cap Q,$$

получаем требуемую гипергрань. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8.4. Пусть Q — полиэдральное множество в $\mathbb{R}^d$. Тогда каждая грань Q также является полиэдральным множеством.

Доказательство. Достаточно установить это утверждение для собственных граней Q . Теорема 8.3 показывает, что любая собственная грань множества Q является гранью некоторой его гиперграни. Однако, согласно утверждению (b) теоремы 8.2, гиперграни Q являются полиэдральными множествами. Теперь наше утверждение получается индукцией по размерности. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8.5. У всякого полиэдрального множества Q в $\mathbb{R}^d$ число граней конечно.

Доказательство. Число гиперграней полиэдрального множества

Q конечно (см. утверждение (b) теоремы 8.2). Каждая собственная грань множества Q по теореме 8.3 является гранью некоторой его гиперграни. Поэтому наше утверждение получается индукцией по размерности. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8.6. Пусть Q — полиэдральное множество в $\mathbb{R}^d$ с $\dim Q = d$, и пусть F_j и F_k — его грани, причём

$$F_j \subset F_k$$

и

$$\dim F_j = j, \quad \dim F_k = k,$$

где

$$0 \leq j < j+1 \leq k-1 < k \leq d.$$

Тогда у Q существуют такие грани $F_{j+1}, \dots, F_{k-1}$, что

$$F_j \subset F_{j+1} \subset \dots \subset F_{k-1} \subset F_k$$

и

$$\dim F_i = i, \quad i = j+1, \dots, k-1.$$

Доказательство. По теореме 5.2, F_j — собственная грань F_k , а по следствию 8.4 грань F_k — полиэдральное множество. Поэтому теорема 8.3 обеспечивает существование гиперграни F_{k-1} в F_k , такой что $F_j \subset F_{k-1}$. Если $j = k-2$, то всё доказано. Если $j < k-2$, то повторяем то же рассуждение, заменив F_k на F_{k-1} . Продолжая таким образом, получим грани F_i с нужными свойствами. $\square$

Отметим, что в следствии 8.6 мы на самом деле имеем

$$F_j \subsetneq F_{j+1} \subsetneq \dots \subsetneq F_{k-1} \subsetneq F_k.$$

Заметим также, что при $j = -1$ утверждение этого следствия теряет силу.

Завершая этот параграф, установим следующий результат:

СЛЕДСТВИЕ 8.7. Пусть Q — непустое ограниченное полиэдральное множество в $\mathbb{R}^d$. Тогда Q — многогранник.

Доказательство. По предположению, Q — выпуклое компактное множество. В силу следствия 8.5, $\text{ext } Q$ является конечным множеством. Поэтому наше утверждение вытекает из импликации $(b) \Rightarrow (a)$ теоремы 7.1. $\square$

Справедливо и обратное утверждение (см. § 9).

У п р а ж н е н и я

- 8.1. Докажите, что каждая грань непустого полиэдрального множества является выступающей.
- 8.2. Докажите, что всякое непустое полиэдральное множество, не содержащее ни одной прямой, имеет по меньшей мере одну вершину. (Здесь термин "вершина" означает, конечно, "нульмерная грань". Заметим, что в силу упр. 8.2 все нульмерные грани непустого полиэдрального множества — выступающие.)
- 8.3. Докажите, что образ полиэдрального множества при аффинном отображении остаётся полиэдральным множеством. (Предупреждаем: это, как ни странно, далеко не просто!)

§9. ПОЛЯРНОСТЬ МНОГОГРАННИКОВ И ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

В этом параграфе мы применим развитую в § 6 теорию полярности к многогранникам и полиэдральным множествам. Будет показано, что для многогранника, имеющего σ внутренней точкой, полярой служит некоторое ограниченное полиэдральное множество, также имеющее σ внутренней точкой, и наоборот. Как было обещано в §8, мы докажем, что каждый многогранник представляет собой ограниченное полиэдральное множество (и, следовательно, многогранники могут быть также описаны как непустые ограниченные полиэдральные множества). Далее, будет усилен один из результатов § 6: мы установим, что если F и G — сопряжённые грани двух взаимно полярных d -многогранников, то выполнено равенство $\dim F + \dim G = d - 1$.

Следующая теорема даёт подробное описание полярности между выпуклыми многогранниками и полиэдральными множествами. Заметим, что полиэдральные множества Q , допускающие представление специального вида

$$Q = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, 1),$$

— это в точности те полиэдральные множества, которые имеют σ своей внутренней точкой.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $x_1, \dots, x_n$, где $n \geq 1$ — попарно различные точки в $\mathbb{R}^d$, и пусть

$$P := \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\},$$

$$Q := \bigcap_{i=1}^n K(x_i, 1).$$

Тогда

- (a) $P^\circ = Q$;
- (b) $Q^\circ = \text{conv} \{\sigma, x_1, \dots, x_n\}$;
- (c) P и Q взаимно полярны, если и только если $\sigma \in P$;
- (d) P и Q взаимно полярны, причём Q ограничено, если и только если $\sigma \in \text{int} P$;
- (e) если P и Q взаимно полярны, причём Q ограничено (т.е. $\sigma \in \text{int} P$, см. (d)), то для того чтобы выполнялось равенство

$$\text{ext} P = \{x_1, \dots, x_n\},$$

необходимо и достаточно, чтобы представление

$$Q = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, 1)$$

было неприводимым.

Доказательство. (a) Из формулы (1) §6 вытекает, что

$$\{x_1, \dots, x_n\}^\circ = Q, \quad (1)$$

а из формулы (2) §6 — что

$$\{x_1, \dots, x_n\}^\circ = (\text{conv} \{x_1, \dots, x_n\})^\circ, \quad (2)$$

так как включение $M \subset K(y, 1)$ выполнено тогда и только тогда, когда $\text{conv} M \subset K(y, 1)$. Из (1) и (2) следует (a).

(b) Используя (a), теорему 6.2 и следствие 2.9, получаем

$$Q^\circ = P^{\circ\circ} = \text{clconv} \{\sigma, x_1, \dots, x_n\} \\ = \text{conv} \{\sigma, x_1, \dots, x_n\},$$

что и доказывает (b).

(c) Это немедленно вытекает из (a) и (b).

(d) Это утверждение является следствием утверждения (c) и теоремы 6.1.

(e) В случае $d=0$ доказывать нечего. Если $d \geq 1$, то мы должны иметь $n \geq 2$, поскольку $\sigma \in \text{int } P$. Положим для $j=1, \dots, n$

$$P_j := \text{conv} \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\},$$

$$Q_j := \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n K(x_i, 1).$$

Если мы применим (a) к $\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}$ вместо $\{x_1, \dots, x_n\}$, то получим

$$P_j^0 = Q_j. \quad (3)$$

Далее, импликация (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 7.2 показывает, что всегда

$$\text{ext } P \subset \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Если $\text{ext } P$ — собственное подмножество множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, то, в силу утверждения (c) теоремы 7.2, $P = P_j$ для некоторого j . Но тогда в $P^0 = P_j^0$ и потому, ввиду (3), $P^0 = Q_j$. А так как, в силу (a), $P^0 = Q$, то $Q = Q_j$. Следовательно, рассматриваемое представление множества Q приводимо.

Обратно, если это представление приводимо, то для некоторого j мы имеем $Q = Q_j$, а значит, $Q^0 = Q_j^0$. Применяя (b) к $\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}$ вместо $\{x_1, \dots, x_n\}$, получаем

$$Q_j^0 = \text{conv} \{\sigma, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}.$$

Поскольку, по предположению, $Q^0 = P$, а как мы только что убедились, $Q^0 = Q_j^0$, то

$$P = \text{conv} \{\sigma, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}.$$

Эквивалентность (a) $\Leftrightarrow$ (b) из теоремы 7.2 показывает теперь, что в правой части можно опустить любую из точек $\sigma, x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$, не являющуюся крайней точкой P . Из сделанного предположения вытекает, что σ — как раз такая точка. Значит,

$$P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}.$$

Но тогда импликация (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 7.2 даёт

$$\text{ext } P \subset \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\},$$

и, значит, $\text{ext } P$ — собственное подмножество в $\{x_1, \dots, x_n\}$. $\square$

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы доказать наш главный результат:

ТЕОРЕМА 9.2. Непустое подмножество P в $\mathbb{R}^d$ тогда и только тогда является многогранником, когда оно представляет собой ограниченное полиэдральное множество.

Доказательство. Достаточность уже была установлена нами в следствии 8.7. Докажем необходимость. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^d$, т. е.

$$P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

При доказательстве того, что P — ограниченное полиэдральное множество, можно без потери общности считать, что $\sigma \in \text{int } P$. В силу утверждения (a) теоремы 9.1, $P^0 = Q$, где Q — полиэдральное множество, определенное соотношением

$$Q := \bigcap_{i=1}^n K(x_i, 1).$$

В силу утверждения (d) той же теоремы, Q ограничено и $Q^0 = P$. Применяя теперь к Q следствие 8.7, заключаем, что Q — многогранник, скажем

$$Q = \text{conv} \{y_1, \dots, y_m\}.$$

Применим теперь теорему 9.1 к набору $\{y_1, \dots, y_m\}$. Утверждение (а) показывает, что $Q^0 = R$, где R — полиэдральное множество, определённое соотношением

$$R := \bigcap_{j=1}^m K(y_j, 1).$$

Но, как мы уже видели, $Q^0 = P$, а значит,

$$P = \bigcap_{j=1}^m K(y_j, 1),$$

т. е. P — полиэдральное множество. $\square$

Теперь при изучении многогранников мы можем пользоваться результатами, установленными в § 8 для полиэдральных множеств.

СЛЕДСТВИЕ 9.3. Пусть P_1 и P_2 — многогранники в $\mathbb{R}^d$, такие что $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$. Тогда $P_1 \cap P_2$ — также многогранник.

Доказательство. Пересечение любых двух полиэдральных множеств в $\mathbb{R}^d$ является полиэдральным множеством. Поэтому утверждение вытекает из теоремы 9.2. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 9.4. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^d$ и A — аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$, такое что $P \cap A \neq \emptyset$. Тогда $P \cap A$ — тоже многогранник.

Доказательство. Любое аффинное подпространство в $\mathbb{R}^d$ является полиэдральным множеством. Поэтому данное следствие доказывается точно так же, как следствие 9.3. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 9.5. Всякий d -многогранник P в $\mathbb{R}^d$ имеет не меньше $d+1$ гиперграней.

Доказательство. Пусть

$$P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $v \in \text{int } P$. По-

ложим

$$Q := \bigcap_{i=1}^n K(x_i, 1).$$

Тогда, в силу утверждения (d) теоремы 9.1, P и Q взаимно полярны, причём Q ограничено (и $v \in \text{int } Q$). Из следствия 8.7 вытекает, что Q есть d -многогранник. Пусть $y_1, \dots, y_m$ — его вершины, и пусть

$$R := \bigcap_{j=1}^m K(y_j, 1).$$

Тогда Q и R взаимно полярны (ввиду того же утверждения (d) теоремы 9.1), а значит, $R = P$. Далее, из утверждения (e) теоремы 9.1 вытекает, что представление

$$P = \bigcap_{j=1}^m K(y_j, 1)$$

неприводимо. Но тогда, в силу утверждений (b) и (c), число гиперграней P равно m . С другой стороны, число вершин d -многогранника Q не меньше $d+1$, следовательно, $m \geq d+1$, что и требовалось установить. $\square$

Переходя к нашему следующему результату, заметим, что если F — гипергрань d -многогранника P в $\mathbb{R}^d$, то $\text{aff } F$ — опорная гиперплоскость к P .

СЛЕДСТВИЕ 9.6. Пусть P — произвольный d -многогранник в $\mathbb{R}^d$, $F_1, \dots, F_n$ — его гипергрani, и пусть $K(x_i, \alpha_i)$ для $i = 1, \dots, n$ обозначает опорное к P полупространство с границей $\text{aff } F_i$. Тогда

$$P = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, \alpha_i)$$

и это представление неприводимо.

Доказательство. В силу теоремы 9.2, P — полиэдральное множество. Пусть

$$P = \bigcap_{j=1}^m K(y_j, \beta_j)$$

— какое-нибудь неприводимое представление P . Тогда, в силу утверждений (b) и (c) теоремы 8.2, гипергранями P служат множества $H(y_j, \beta_j) \cap P$. Но по предположению его гипергранями служат также и множества $H(x_i, \alpha_i) \cap P$. Поэтому $m = n$ и между i и j можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что

$$H(x_i, \alpha_i) = H(y_j, \beta_j)$$

для отвечающих друг другу i и j . Разумеется, тогда также и

$$K(x_i, \alpha_i) = K(y_j, \beta_j).$$

Это показывает, что

$$P = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, \alpha_i)$$

и что это представление неприводимо. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 9.7. Пусть P — произвольный d -многогранник в $\mathbb{R}^d$ и F_j, F_k — его грани, удовлетворяющие условиям

$$F_j \subset F_k$$

и

$$\dim F_j = j, \quad \dim F_k = k,$$

где

$$-1 \leq j < j+1 \leq k-1 < k \leq d.$$

Тогда у P найдутся такие грани $F_{j+1}, \dots, F_{k-1}$, что

$$F_j \subset F_{j+1} \subset \dots \subset F_{k-1} \subset F_k$$

и

$$\dim F_i = i, \quad i = j+1, \dots, k-1.$$

Доказательство. Ввиду теоремы 9.2, в случае $j \geq 0$ утверждение немедленно вытекает из следствия 8.6. В случае $j = -1$ возьмём в качестве F_0 любую вершину грани F_k . Если $k=1$, то мы уже имеем нужную цепочку граней. Если же $k \geq 2$, то применяем следствие 8.6 к граням F_0 и F_k . $\square$

Теперь займёмся уточнением неравенства из теоремы 6.10. Заметим, что если P — какой-либо d -многогранник в $\mathbb{R}^d$ с $\sigma \in \text{int} P$, то P и P^0 составляют пару взаимно полярных d -многогранников, и любая пара взаимно полярных d -многогранников получается так; это следует из теоремы 9.2 и утверждений (а), (d) теоремы 9.1. Напомним также, что любая грань F многогранника P является элементом пары F, G сопряжённых граней, поскольку все грани P , в силу теоремы 7.5, — выступающие.

ТЕОРЕМА 9.8. Пусть P и Q — взаимно полярные d -многогранники в $\mathbb{R}^d$, и пусть F и G — сопряжённые друг с другом грани многогранников P и Q соответственно. Тогда

$$\dim F + \dim G = d - 1.$$

В частности, вершины P сопряжены с гипергранями Q , а гиперграни P — с вершинами Q .

Доказательство. Вернёмся к доказательству теоремы 6.10. Там было выяснено, что достаточно рассмотреть случай, когда F и G — собственные грани. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — вершины P , а $x_1, \dots, x_k$ — вершины F . Тогда в силу утверждения (а) теоремы 9.1

$$Q = \bigcap_{i=1}^n K(x_i, 1). \quad (4)$$

Далее, по определению операции Δ имеем

$$G = Q \cap \bigcap_{x \in F} H(x, 1). \quad (5)$$

Заметим теперь, что

$$\bigcap_{x \in F} H(x, 1) = \bigcap_{i=1}^k H(x_i, 1). \quad (6)$$

В самом деле, если y принадлежит $H(x_i, 1)$ для каждого $i = 1, \dots, k$, то $x_1, \dots, x_k$ принадлежат $H(y, 1)$ и, значит, любая точка $x \in F$ должна принадлежать $H(y, 1)$, а это показывает, что y принадлежит $H(x, 1)$ для любого $x \in F$. Из (4) – (6) следует, что

$$G = \bigcap_{i=k+1}^n K(x_i, 1) \cap \bigcap_{i=1}^k H(x_i, 1). \quad (7)$$

Положим

$$A := \bigcap_{i=1}^k H(x_i, 1).$$

Очевидно, что A – аффинное подпространство, содержащее G . На самом деле $A = \text{aff } G$. Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что G – полиэдральное множество в A , имеющее (см. (7)) представление

$$G = \bigcap_{i=k+1}^n K(x_i, 1) \cap A$$

(конечно, может случиться, что для некоторых значений i выполняется равенство $K(x_i, 1) \cap A = A$.) Далее, ясно, что непустое пересечение G замкнутых полупространств в аффинном пространстве A должно иметь меньшую размерность, чем само A , если G содержится в гиперплоскости, ограничивающей одно из полупространств $K(x_i, 1) \cap A$, $i = k+1, \dots, n$. Но тогда G – подмножество гиперплоскости $H(x_i, 1)$, а значит, $x_i \in G \Delta = F$ для некоторого i , большего k , что противоречит нашему предположению. Итак, $A = \text{aff } G$, откуда, в частности, следует, что

$$\dim G = \dim A = \dim \bigcap_{x \in F} H(x, 1).$$

Поэтому в доказательстве теоремы 6.10 в соотношении (9) мы имеем равенство, и последующая часть этого доказательства даёт нам нужную формулу. $\square$

В §10 будет дано другое доказательство теоремы 9.8.

Отметим, что, опираясь на теорему 9.8, можно заново получить следствие 9.5.

У п р а ж н е н и я

- 9.1. Сечениями многогранника P в $\mathbb{R}^d$ называются его пересечения с аффинными подпространствами в $\mathbb{R}^d$. Докажите, что каждый многогранник P с n гипергранями представляет собой сечение некоторого $(n-1)$ -симплекса. [Это надо понимать так: "вложив" P в $\mathbb{R}^{n-1}$, постройте в $\mathbb{R}^{n-1}$ такой симплекс S , что $S \cap \text{aff} P = P$. Указание: можно воспользоваться упр. 6.5 и 7.1.]
- 9.2. Пусть P и Q — взаимно полярные выпуклые многогранники в $\mathbb{R}^d$, и пусть F и G — сопряжённые друг с другом грани многогранников P и Q соответственно. Докажите, что $G = Q \cap H(x, 1)$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{ri } F$ (см. упр. 6.6).

§10. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ МНОГОГРАННИКОВ

Можно сказать, что комбинаторная теория выпуклых многогранников (которой посвящена гл. 3) занимается изучением решёток граней выпуклых многогранников. С точки зрения этой теории нет надобности различать между собой многогранники, у которых решётки граней изоморфны. Это естественно ведёт к понятию эквивалентных многогранников.

В § 6 была развита теория полярности выпуклых множеств, а в § 9 мы применили эту теорию для вывода основных свойств выпуклых многогранников. Фундаментальным является тот факт, что для пары P, Q взаимно полярных многогранников операция Δ индуцирует антиизоморфизм решёток граней. Если стать на упомянутую выше точку зрения (ведущую к понятию эквивалентности многогранников), то нет нужды делать различие между Q и любым другим многогранником, решётка граней которого изоморфна решётке граней Q . Все такие многогранники, однако, представляют собой не что иное, как многогранники, у которых решётки граней антиизоморфны решётке граней P .

Про два многогранника говорят, что они эквивалентны (а про каждый из них — что он является эквивалентом другого), если их решётки граней изоморфны. Понятно, что это — отношение эквивалентности. Образ $\varphi(P)$ данного многогранника P при любом аффинном изоморфизме φ представляет собой эквивалент P ; но, вообще говоря, P обладает и многими другими эквивалентами.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть P и Q — эквивалентные многогранники с $\dim P = d$, и пусть

$$\varphi: (\mathcal{F}(P), \subset) \rightarrow (\mathcal{F}(Q), \subset)$$

— некоторый изоморфизм решёток. Тогда

$$\dim Q = d$$

и

$$\dim \varphi(F) = \dim F$$

для каждой грани F многогранника P .

Доказательство. В силу следствия 9.7 каждая грань F многогранника P входит в цепочку его граней

$$\emptyset = F_{-1} \subsetneq \dots \subsetneq F_i \subsetneq \dots \subsetneq F_d = P, \quad (1)$$

где

$$\dim F_i = i, \quad i = -1, \dots, d.$$

Поскольку φ — изоморфизм, из (1) следует, что

$$\emptyset = \varphi(F_{-1}) \subsetneq \dots \subsetneq \varphi(F_i) \subsetneq \dots \subsetneq \varphi(F_d) = Q, \quad (2)$$

а значит,

$$\dim \varphi(F_{i+1}) \geq \dim \varphi(F_i) + 1, \quad i = -1, \dots, d-1 \quad (3)$$

(следствие 5.5). Отсюда ясно, что $\dim \varphi(F_d) \geq d$, т. е.

$$\dim Q \geq d = \dim P.$$

Но роли P и Q полностью симметричны, и поэтому на самом деле

$$\dim Q = d,$$

как и утверждалось. В свою очередь отсюда вытекает, что для каждого i в (3) мы фактически имеем равенство, и, следовательно,

$$\dim \varphi(F_i) = i, \quad i = -1, \dots, d,$$

чем доказательство и завершено. $\square$

Говорят, что два многогранника двойственны друг другу (и каждый из них называется двойственным к другому), если их решётки граней антиизоморфны. Отметим, что если P и Q_1 двойственны, то P и Q_2 двойственны тогда и только тогда, когда Q_1 и Q_2 эквивалентны.

Проблема существования двойственного многогранника была уже по существу решена нами (см. следствие 6.8):

ТЕОРЕМА 10.2. Для любого многогранника P существует двойственный многогранник Q .

Доказательство. Для любого d -многогранника P существует эквивалентный d -многогранник P_1 в $\mathbb{R}^d$, такой что $\sigma \in \text{int } P_1$. Следствие 6.8 показывает, что многогранник $Q_1 := P_1^0$ двойствен к P_1 . Но тогда, в силу эквивалентности P и P_1 , многогранник Q_1 двойствен также и к P . $\square$

Как это будет видно из приводимых ниже замечаний, следующая теорема тесно связана с теоремой 9.8:

ТЕОРЕМА 10.3. Пусть P и Q - двойственные многогранники.
 $\dim P = d$ и

$$\psi: (\mathcal{F}(P), \subset) \rightarrow (\mathcal{F}(Q), \subset)$$

- некоторый антиизоморфизм. Тогда

$$\dim Q = d$$

и

$$\dim \psi(F) = d - 1 - \dim F$$

для любой грани F многогранника P .

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 10.1, воспользуемся тем фактом, что любая грань F многогранника P входит в некоторую цепочку его граней

$$\phi = F_{-1} \subsetneq \dots \subsetneq F_i \subsetneq \dots \subsetneq F_d = P, \quad (4)$$

где

$$\dim F_i = i, \quad i = -1, \dots, d. \quad (5)$$

Поскольку ψ — антиизоморфизм, из (4) следует, что

$$Q = \psi(F_{-1}) \supsetneq \dots \supsetneq \psi(F_i) \supsetneq \dots \supsetneq \psi(F_d) = \phi, \quad (6)$$

а значит,

$$\dim \psi(F_i) \geq \dim \psi(F_{i+1}) + 1, \quad i = -1, \dots, d-1. \quad (7)$$

Отсюда ясно, что $\dim \psi(F_{-1}) \geq d$, т.е.

$$\dim Q \geq d = \dim P.$$

Поскольку роли P и Q симметричны, мы заключаем, что

$$\dim Q = d.$$

Первое утверждение теоремы доказано. В свою очередь отсюда вытекает, что на самом деле для всех i в (7) имеет место равенство и, следовательно,

$$\begin{aligned} \dim \psi(F_i) &= d - 1 - i \\ &= d - 1 - \dim F_i, \quad i = -1, \dots, d, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. $\square$

Ясно, что теорема 9.8 является непосредственным следствием теоремы 10.3. С другой стороны, и теорему 10.3 можно вывести из теоремы 9.8, используя теорему 10.1; достаточно заметить, что если P и Q двойственны и $\dim P = d$, то найдётся такая пара P_1, Q_1 взаимно полярных d -многогранников, что P есть эквивалент P_1 , а Q — эквивалент Q_1 .

Теперь мы установим два важных результата о гранной структуре многогранников; их доказательства опираются на теорему 10.3.

ТЕОРЕМА 10.4. Пусть P — некоторый d -многогранник, и F — его собственная грань P . Тогда F совпадает с пересечением всех гиперграней P , содержащих F . Если F есть k -грань, то для $k = 0, 1, \dots, d-3$ таких гиперграней найдётся не менее $d-k$, для $k = d-2$ — в точности 2 ($= d-k$), а для $k = d-1$ — в точности 1 ($= d-k$).

Доказательство. Пусть Q — двойственный к P многогранник и ψ — некоторый антиизоморфизм $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Пусть F — заданная k -грань P и $G := \psi(F)$. Тогда

$$\dim G = d-1-k,$$

в силу теоремы 10.3. Значит, G имеет по меньшей мере

$$(d-1-k)+1 = d-k$$

вершин. Для $k = d-2$ и $k = d-1$ число вершин G в точности равно $d-k$, так как 1-многогранники имеют две вершины, а 0-многогранники — одну. Теперь рассмотрим антиизоморфизм ψ^{-1} решётки $(\mathcal{F}(Q), \subset)$ на решётку $(\mathcal{F}(P), \subset)$. Формула для размерности образа грани из теоремы 10.3 показывает, что вершины Q соответствуют гиперграням P . Значит, поскольку G — наименьшая из граней Q , содержащих все вершины G , F есть пересечение всех гиперграней P , содержащих F . $\square$

ТЕОРЕМА 10.5. Пусть P — некоторый d -многогранник и x — какая-либо из его вершин. Тогда найдётся не менее d рёбер P , содержащих x .

Доказательство. Пусть Q — двойственный к P многогранник и ψ — некоторый антиизоморфизм $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Положим $G := \psi(\{x\})$; в силу теоремы 10.3, G представляет собой $(d-1)$ -грань Q . Следствие 9.5 показывает, что число $(d-2)$ -граней G не меньше d . Но тогда в силу двойственности между P и Q число 1-граней P , содержащих x , также не меньше d (см. теорему 10.3). $\square$

Используя терминологию теории графов (см. добавление 2, а также 2 § 15), будем говорить, что две различные вершины многогранника P смежны, если соединяющий их прямолинейный отрезок

является ребром P ; если же данная вершина служит вершиной данного ребра, то эти вершину и ребро мы назовём инцидентными. В такой терминологии теорема 10.5 утверждает, что число вершин, смежных с x , или число рёбер, инцидентных x , не меньше d .

Для всякого d -многогранника P обозначим через $f_j(P)$ число его j -граней ($j = -1, 0, \dots$). Таким образом, $f_{-1}(P) = f_d(P) = 1$ и $f_j(P) = 0$ при $j > d$. Для $d \geq 1$ набор

$$f(P) := (f_0(P), \dots, f_{d-1}(P)),$$

состоящий из d натуральных чисел, называется вектором чисел граней¹ (или f -вектором) многогранника P . Понятие f -вектора будет играть центральную роль в гл. 3. Здесь же мы пока отметим лишь один результат, который немедленно вытекает из теорем 10.1 и 10.3:

СЛЕДСТВИЕ 10.6. Пусть P — некоторый d -многогранник (где $d \geq 1$). Тогда для любого многогранника P_1 , эквивалентного P ,

$$f(P_1) = (f_0(P), \dots, f_{d-1}(P)),$$

т. е. $f(P_1) = f(P)$, а для любого многогранника Q , двойственного к P ,

$$f(Q) = (f_{d-1}(P), \dots, f_0(P)).$$

У п р а ж н е н и я

10.1. Докажите, что любой эквивалент d -пирамиды является d -пирамидой.

10.2. Докажите, что любой многогранник, двойственный к d -пирамиде, — это опять d -пирамида.

¹ В оригинале face-vector. Отсюда f в термине " f -вектор". — Прим. ред.

- 10.3. Докажите, что если Q_1 и Q_2 — эквивалентные многогранники, то любая пирамида P_1 с основанием Q_1 эквивалентна любой пирамиде P_2 с основанием Q_2 .
- 10.4. Докажите, что утверждение упр. 10.1, вообще говоря, теряет силу для бипирамид.
- 10.5. Докажите, что для любой бипирамиды среди двойственных к ней многогранников содержатся как призмы, так и не призмы.
- 10.6. Пусть P_1 и P_2 — многогранники, φ' — взаимно-однозначное отображение вершин P_1 на вершины P_2 и φ'' — взаимно-однозначное отображение гиперграней P_1 на гиперграней P_2 . Предположим, что $\varphi'(x)$ тогда и только тогда служит вершиной $\varphi''(F)$, когда x — вершина F . Докажите, что существует изоморфизм φ решётки $(\mathcal{F}(P_1), \subset)$ на решётку $(\mathcal{F}(P_2), \subset)$, являющийся продолжением и φ' , и φ'' . В частности, P_1 и P_2 эквивалентны. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение.
- 10.7. Используя соображения двойственности, докажите, что ни одна вершина многогранника P не принадлежит всем его гиперграням.
- 10.8. Пусть F_1 и F_2 — грани d -многогранника P , такие что $F_1 \subset F_2$ и $\dim F_1 < \dim F_2 \leq d-1$. Докажите, что у P найдётся такая грань F_3 , что $\dim F_3 = \dim F_1 + 1$, $F_1 \subset F_3$ и $F_3 \not\subset F_2$. [Указание: здесь бесполезно упр. 10.7.]
- 10.9. Пусть P — некоторый d -многогранник. Докажите, что для $j < k \leq d-1$ любая его j -грань F совпадает с пересечением всех его k -граней, содержащих F .
- 10.10. Пусть P — октаэдр, а Q — это 3-многогранник, полученный "добавлением пирамид"¹ над двумя из гиперграней 3-симплекса. Убедитесь, что $f(P) = f(Q)$. Докажите, что P и Q не эквивалентны.

¹ См. конец § 11. — Прим. ред.

§ 11. ВЕРШИННЫЕ ФИГУРЫ

Вершинные фигуры d -многогранника P — это некоторые определенные $(d-1)$ -многогранники, каждый из которых содержит информацию о "локальной" гранной структуре P "вблизи" одной из вершин. В этом параграфе собран ряд результатов о вершинных фигурах, а также некоторые близкие результаты.

Сначала мы изучим гранную структуру непустого пересечения $H \cap P$ произвольного d -многогранника P в $\mathbb{R}^d$ с произвольной гиперплоскостью H в $\mathbb{R}^d$. Заметим, что если гиперплоскость H не пересекается с $\text{int } P$, то (по теореме 4.1) она обязана быть опорной к P , и тогда пересечение $H \cap P$ будет просто некоторой гранью P (гранная структура которой известна, если известна гранная структура P).

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть P — некоторый d -многогранник в $\mathbb{R}^d$ и H — такая гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, что

$$H \cap \text{int } P \neq \emptyset.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- (a) Множество $P' := H \cap P$ представляет собой $(d-1)$ -многогранник.
- (b) Пусть F — грань P . Тогда $F' := H \cap F$ — грань P' и $\dim F' \leq \dim F$. Если $F' \neq \emptyset$ и H не служит опорной гиперплоскостью к F (т. е. F' — не является гранью F , а значит и гранью P), то $\dim F' = \dim F - 1$.
- (c) Пусть F' — грань P' . Тогда существует по меньшей мере одна грань F многогранника P , такая что $F' = H \cap F$, и для каждой такой грани F мы имеем $\dim F \geq \dim F'$.
- (d) Пусть F' — грань P' . Если F' не является гранью P , то существует одна и только одна грань F многогранника P , такая что $F' = H \cap F$, и для этой грани F мы имеем $\dim F = \dim F' + 1$.

Доказательство. (a) Множество P' есть многогранник в силу следствия 9.4, и ясно, что размерность P' равна $d-1$.

(b) Из определения грани немедленно следует, что F' — грань P' , и очевидно, что $\dim F' \leq \dim F$. Если $F' \neq \emptyset$ и H не есть опорная гиперплоскость к F , то $F \not\subset H$ и $H \cap \text{ri} F \neq \emptyset$ (см. теорему 4.1). Но тогда пересечение $H \cap \text{aff} F$ представляет собой гиперплоскость в $\text{aff} F$, пересечение которой с внутренностью F в $\text{aff} F$ непусто, и, значит, $\dim (H \cap F) = \dim F - 1$.

(c) Для $F' = \emptyset$ утверждение очевидно. В случае $F' \neq \emptyset$ заметим, что если F — такая грань P , что $F' = H \cap F$, то $\dim F \geq \dim F'$. Чтобы установить существование такой грани F , рассмотрим точку $x_0 \in \text{ri} F'$ и обозначим через F_0 наименьшую грань P , содержащую x_0 . Согласно теореме 5.6, $x_0 \in \text{ri} F_0$. Проверим, что

$$F' = H \cap F_0. \quad (1)$$

Тем самым утверждение (c) будет доказано. Пусть $y \in F'$, причём $y \neq x_0$. Тогда найдётся такая точка $z \in F'$, что $x_0 \in]y, z[$ (см. импликацию (a) $\Rightarrow$ (c) из теоремы 3.5). Поскольку F_0 — это грань P , которая содержит x_0 , мы заключаем, что $y \in F_0$ (и $z \in F_0$). Так как $F' \subset H$, этим доказано, что левая часть (1) содержится в правой. Обратно, пусть $y \in H \cap F_0$, причём $y \neq x_0$. Тогда в силу импликации (a) $\Rightarrow$ (c) из теоремы 3.5 существует такая точка $z \in F_0$, что $x_0 \in]y, z[$. Поскольку x_0 и y принадлежат H , то и z также должна принадлежать H , а значит, $y, z \in P'$. Поскольку F' — грань P' , содержащая x_0 , то $y \in F'$ (и $z \in F'$). Тем самым доказано, что и правая часть (1) содержится в левой.

(d) Если $F' = \emptyset$, то доказывать нечего. В случае же $F' \neq \emptyset$ воспользуемся рассуждениями, проведёнными при доказательстве утверждения (c). Пусть F — такая грань P , что $F' = H \cap F$. Тогда она обязана содержать точку x_0 , а значит, $F_0 \subset F$, по определению F_0 . Следствие 5.5 показывает теперь, что если $F_0 \subsetneq F$, то $\dim F_0 < \dim F$. Установим, что на самом деле имеет место равенство

$$\dim F_0 = \dim F = \dim F' + 1,$$

чем доказательство и будет завершено. Пусть G — произвольная грань P , такая что $F' = H \cap G$. Поскольку, по предположе-

нию, F' не является гранью P , то утверждение (b), применённое к G , даёт $\dim G = \dim F' + 1$. Так как это равенство выполнено и для $G = F_0$, и для $G = F$, мы приходим к требуемому заключению. $\square$

Пусть x_0 — вершина d -многогранника P в $\mathbb{R}^d$ (где $d \geq 1$). Тогда существует опорная к P гиперплоскость $H(y, \alpha)$, такая что

$$H(y, \alpha) \cap P = \{x_0\}.$$

Считая, что $P \subset K(y, \alpha)$, видим, что для некоторого $\beta < \alpha$ все вершины P , за исключением x_0 , принадлежат $K(y, \beta) \setminus H(y, \beta)$, а x_0 принадлежит $\mathbb{R}^d \setminus K(y, \beta)$. Другими словами, существует гиперплоскость H , которая отделяет x_0 от всех остальных вершин P в том смысле, что x_0 лежит по одну сторону от H , а все прочие вершины — по другую. Под вершинными фигурами многогранника P в точке x_0 мы понимаем множества вида $H \cap P$, где H — произвольная гиперплоскость, отделяющая x_0 от остальных вершин P (на самом деле такие пересечения представляют собой $(d-1)$ -многогранники, см. приводимую ниже теорему 11.2).

Для данной вершины x_0 многогранника P обозначим через $\mathcal{F}(P/x_0)$ множество всех граней P , содержащих x_0 . Ясно, что $(\mathcal{F}(P/x_0), \subset)$ — подрешётка в $(\mathcal{F}(P), \subset)$. Эта решётка, в сущности, представляет собой решётку граней вершинной фигуры многогранника P в точке x_0 :

ТЕОРЕМА 11.2. Пусть P — некоторый d -многогранник в $\mathbb{R}^d$, x_0 — его вершина и $P' = H \cap P$ — вершинная фигура P в x_0 . Тогда P' представляет собой $(d-1)$ -многогранник и отображение

$$F \mapsto F' := H \cap F$$

есть изоморфизм подрешётки $(\mathcal{F}(P/x_0), \subset)$ решётки $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на решётку $(\mathcal{F}(P'), \subset)$.

Доказательство. Гиперплоскость H пересекает P и не является опорной. Поэтому

$$H \cap \text{int } P \neq \emptyset,$$

в силу теоремы 4.1. Следовательно, в силу утверждения (а) теоремы 11.1, P' есть $(d-1)$ -многогранник.

Из утверждения (b) теоремы 11.1 следует, что отображение

$$F \mapsto F' := H \cap F$$

отображает $\mathcal{F}(P/x_0)$ в $\mathcal{F}(P')$, а в силу утверждения (d) той же теоремы оно взаимно-однозначно и является отображением на. Наконец, очевидно, что оно сохраняет включения. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 11.3. Пусть P — произвольный d -многогранник в R^d и x_0 — его вершина. Тогда любые две вершинные фигуры P в x_0 эквивалентны.

Доказательство. В самом деле, если P' и P'' — вершинные фигуры P в x_0 , то обе решётки $(\mathcal{F}(P'), \subset)$ и $(\mathcal{F}(P''), \subset)$ изоморфны $(\mathcal{F}(P/x_0), \subset)$, а значит, они изоморфны друг другу. $\square$

Разумеется, следствие 11.3 можно было бы доказать, и непосредственно основываясь на теореме 11.1.

Пусть теперь F_1 и F_2 — такие грани d -многогранника P , что $F_1 \subset F_2$. Множество всех граней F многогранника P , которые удовлетворяют включениям

$$F_1 \subset F \subset F_2,$$

будем обозначать $\mathcal{F}(F_2/F_1)$. В случае $F_1 = \{x_0\}$ и $F_2 = P$ мы снова получаем $\mathcal{F}(P/x_0)$. Ясно, что $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ является подрешёткой решётки $(\mathcal{F}(P), \subset)$. Из теоремы 11.2 следует, что в том частном случае, когда F_1 — вершина, а $F_2 = P$, решётку $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ можно "реализовать" как решётку граней соответствующего многогранника. Это верно и в общем случае (если, конечно, $F_1 \neq F_2$):

ТЕОРЕМА 11.4. Пусть P — некоторый многогранник, F_1 — его j -грань, а F_2 — его k -грань, причём $F_1 \subsetneq F_2$. Тогда существует такой $(k-1-j)$ -многогранник Q , что решётка $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ изоморфна $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Далее, для всякого изоморфизма φ решётки $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ на решётку $(\mathcal{F}(Q), \subset)$

$$\dim \varphi(F) = \dim F - 1 - j$$

для любой грани $F \in \mathcal{F}(F_2/F_1)$.

Доказательство. Будем рассматривать F_1 как j -грань k -многогранника F_2 . Тогда грани F многогранника P , принадлежащие $\mathcal{F}(F_2/F_1)$, — это просто грани F многогранника F_2 , такие что $F_1 \subset F$. Пусть G_2 — двойственный к F_2 многогранник и ψ — какой-нибудь антиизоморфизм $(\mathcal{F}(F_2), \subset)$ на $(\mathcal{F}(G_2), \subset)$. Граням F многогранника F_2 , содержащим F_1 , отвечают при этом антиизоморфизме грани $G = \psi(F)$ многогранника G_2 , такие что

$$\emptyset = \psi(F_2) \subset G = \psi(F) \subset \psi(F_1).$$

Это показывает, что сужение антиизоморфизма ψ на $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ представляет собой антиизоморфизм решётки $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ на решётку граней $(\mathcal{F}(\psi(F_1)), \subset)$ многогранника $\psi(F_1)$. Поэтому, беря в качестве Q любой многогранник, двойственный к $\psi(F_1)$, мы видим, что решётка $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ изоморфна $(\mathcal{F}(Q), \subset)$.

Чтобы найти размерность Q , заметим, что в силу теоремы 10.3

$$\dim Q = \dim \psi(F_1).$$

Но по формуле для размерности образа грани из той же теоремы

$$\dim \psi(F_1) = k - 1 - \dim F_1 = k - 1 - j.$$

Следовательно,

$$\dim Q = k - 1 - j,$$

как и утверждалось.

Наконец, пусть φ — произвольный изоморфизм $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Каждую грань $F \in \mathcal{F}(F_2/F_1)$ можно включить в некоторую цепочку

$$F_1 = G_j \subsetneq \dots \subsetneq G_i \subsetneq \dots \subsetneq G_k = F_2$$

граней $G_i \in \mathcal{F}(F_2/F_1)$ с

$$\dim G_i = i, \quad i = j, \dots, k,$$

(следствие 9.7). Применение к этой цепочке изоморфизма φ дает цепочку

$$\Phi = \varphi(F_1) = \varphi(G_j) \subsetneq \dots \subsetneq \varphi(G_i) \subsetneq \dots \subsetneq \varphi(G_k) = \varphi(F_2) = Q.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} -1 = \dim \varphi(G_j) &< \dots < \dim \varphi(G_i) < \dots < \dim \varphi(G_k) \\ &= \dim Q = k-1-j \end{aligned}$$

(мы использовали следствие 5.5 и найденное выше выражение для $\dim Q$). Из последней цепочки неравенств вытекает, что

$$\dim \varphi(G_i) = i-1-j, \quad i=j, \dots, k,$$

а значит,

$$\dim \varphi(G_i) = \dim G_i - 1 - j, \quad i=j, \dots, k,$$

чем доказательство и завершено. $\square$

Отметим также следующий результат:

ТЕОРЕМА 11.5. Пусть P и Q — двойственные d -многогранники и

$$\psi: (\mathcal{F}(P), \subset) \rightarrow (\mathcal{F}(Q), \subset)$$

— антиизоморфизм. Пусть, далее, x_0 — вершина P и P' — вершинная фигура P в x_0 . Тогда гипергрань $\psi(\{x_0\})$ многогранника Q двойственна к P' .

Доказательство. Из теоремы 11.2 мы знаем, что решётки $(\mathcal{F}(P'), \subset)$ и $(\mathcal{F}(P/x_0), \subset)$ изоморфны. Если в доказательстве теоремы 11.4 взять $F_1 = \{x_0\}$ и $F_2 = P$, то мы увидим, что решётка $(\mathcal{F}(P/x_0), \subset)$ изоморфна $(\mathcal{F}(R), \subset)$, где R — любой многогранник, двойственный к $\psi(\{x_0\})$. (Этот многогранник R в доказательстве теоремы 11.4 фигурирует как Q .) Поэтому решётка $(\mathcal{F}(P/x_0), \subset)$ антиизоморфна $(\mathcal{F}(\psi(\{x_0\})), \subset)$, что и требовалось установить. $\square$

Пусть x_0 — вершина некоторого d -многогранника P . Вершинные фигуры P в x_0 порождаются гиперплоскостями H ,,

отделяющими x_0 от всех прочих вершин P . Покажем, что для того, чтобы иметь возможность утверждать, что гиперплоскость H отделяет x_0 от всех других вершин P , достаточно убедиться, что она отделяет x_0 от тех из вершин P , которые смежны с x_0 . Сначала установим следующий результат:

ТЕОРЕМА 11.6. Пусть P — некоторый d -многогранник в R^d , x_0 — какая-нибудь его вершина и $x_1, \dots, x_k$ — вершины, смежные с x_0 . Пусть далее, $H(y, \alpha)$ — гиперплоскость в R^d , такая что $x_0 \in H(y, \alpha)$ и $x_1, \dots, x_k \in K(y, \alpha)$. Тогда $P \subset K(y, \alpha)$, т. е. $H(y, \alpha)$ является опорной гиперплоскостью к P . Если к тому же $x_1, \dots, x_k \notin H(y, \alpha)$, то $H(y, \alpha) \cap P = \{x_0\}$.

Доказательство. Пусть $P' = H' \cap P$ — некоторая вершинная фигура P в x_0 , определяемая гиперплоскостью H' , отделяющей x_0 от остальных вершин P . Согласно утверждениям (b) и (d) теоремы 11.1 (или теореме 11.2), вершины P' — это одноточечные множества $[x_0, x_i] \cap H'$, $i = 1, \dots, k$. Поскольку как x_0 , так и $x_1, \dots, x_k$ принадлежат $K(y, \alpha)$ по предположению, мы заключаем, что все вершины P' принадлежат $K(y, \alpha)$, а следовательно, P' содержится в $K(y, \alpha)$.

Пусть x — произвольная вершина P , отличная от x_0 . Тогда x и x_0 лежат по разные стороны от гиперплоскости H' и, значит, пересечение $[x_0, x] \cap H'$ является одноточечным множеством, которое мы обозначим $\{x'\}$. Так как $x' \in P'$ и $P' \subset K(y, \alpha)$, то $x' \in K(y, \alpha)$. Отсюда ясно, что $x \in K(y, \alpha)$. Иначе говоря, все вершины P принадлежат $K(y, \alpha)$, так что $P \subset K(y, \alpha)$.

Если дополнительно предположить, что $x_1, \dots, x_k$ не лежат в $H(y, \alpha)$, то $[x_0, x_i] \subset \text{int } K(y, \alpha)$ для $i = 1, \dots, k$. Таким образом, все вершины P' принадлежат $\text{int } K(y, \alpha)$, и потому $P' \subset \text{int } K(y, \alpha)$. Для любой вершины x многогранника P , отличной от x_0 , мы имеем тогда $x' \in \text{int } K(y, \alpha)$ и, следовательно, $x \in \text{int } K(y, \alpha)$. (Здесь, как и выше, x' обозначает единственную точку множества $[x_0, x] \cap H'$.) Это показывает, что единственной вершиной P в выступающей грани $H(y, \alpha) \cap P$ является x_0 , откуда, в силу теоремы 7.3, следует, что $H(y, \alpha) \cap P = \{x_0\}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 11.7. Пусть P — некоторый d -многогранник в $\mathbb{R}^d$, x_0 — его вершина, а $x_1, \dots, x_k$ — вершины, смежные с x_0 . Тогда

$$\text{aff } \{x_0, x_1, \dots, x_k\} = \mathbb{R}^d.$$

Доказательство. Допустим, что это не так. Тогда найдётся гиперплоскость H , содержащая $x_0, x_1, \dots, x_k$. Оба замкнутых полупространства, ограниченных H , содержат $x_0, x_1, \dots, x_k$. Поэтому, по теореме 11.6, P содержится в обоих этих полупространствах, а значит, $P \subset H$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теперь мы можем доказать следующий результат:

ТЕОРЕМА 11.8. Пусть P — некоторый d -многогранник в $\mathbb{R}^d$, x_0 — его вершина P и $x_1, \dots, x_k$ — вершины, смежные с x_0 . Пусть, далее, H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, отделяющая x_0 от $x_1, \dots, x_k$. Тогда H отделяет x_0 и от любой другой вершины P , а значит, $H \cap P$ — вершинная фигура P в x_0 .

Доказательство. Пусть x — произвольная вершина многогранника P , отличная от $x_1, \dots, x_k$. Обозначим через L прямую, проходящую через x_0 и x . Сначала установим, что интервал $]x_0, x[$ пересекается с множеством

$$Q_1 := \text{conv } \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Пусть H_1 — какая-нибудь гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, ортогональная к L , и $\pi: \mathbb{R}^d \rightarrow H_1$ — ортогональная проекция. Положим

$$Q_0 := \text{conv } \{x_0, x_1, \dots, x_k\}.$$

Ясно, что

$$\pi(Q_0) = \text{conv } \{\pi(x_0), \pi(x_1), \dots, \pi(x_k)\}.$$

В частности, $\pi(Q_0)$ представляет собой многогранник, причём

$$\text{ext } \pi(Q_0) \subset \{\pi(x_0), \pi(x_1), \dots, \pi(x_k)\}$$

(импликация (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 7.2). Допустим, что $\pi(x_0)$ — вершина $\pi(Q_0)$. Тогда в H_1 найдется опорная к $\pi(Q_0)$ гиперплоскость H_2 , такая что $H_2 \cap \pi(Q_0) = \{\pi(x_0)\}$ (теорема 7.5). Но тогда $\pi^{-1}(H_2) = \text{aff}(H_2 \cup L)$ — опорная гиперплоскость к Q_0 в $\mathbb{R}^d$, причём $x_1, \dots, x_k \notin \pi^{-1}(H_2)$ и $x \in \pi^{-1}(H_2)$, что противоречит второму утверждению теоремы 11.6. Значит, $\pi(x_0)$ не может быть вершиной $\pi(Q_0)$. Следовательно,

$$\pi(x_0) \in \text{conv}\{\pi(x_1), \dots, \pi(x_k)\}$$

(импликация (b) $\Rightarrow$ (a) из теоремы 7.2). Так как

$$\text{conv}\{\pi(x_1), \dots, \pi(x_k)\} = \pi(\text{conv}\{x_1, \dots, x_k\}) = \pi(Q_1),$$

то $\pi(x_0) \in \pi(Q_1)$, откуда видно, что L пересекает Q_1 . Но поскольку x_0 и x — вершины P , а Q_1 содержится в P , всякая точка прямой L , принадлежащая Q_1 , должна лежать между x_0 и x .

Пусть теперь H — произвольная гиперплоскость, отделяющая вершину x_0 от вершин $x_1, \dots, x_k$. Обозначим через K то из замкнутых полупространств, ограниченных H , которое содержит $x_1, \dots, x_k$. Тогда $x_1, \dots, x_k$ принадлежат $\text{int} K$, а значит, $Q_1 \subset \text{int} K$. Пусть x — любая другая вершина P . Используя доказанный выше факт, мы заключаем, что по меньшей мере одна точка интервала $]x_0, x[$ принадлежит $\text{int} K$. Ввиду выпуклости множества $\mathbb{R}^d \setminus \text{int} K$ мы должны тогда иметь $x \in \text{int} K$, что и требовалось доказать. $\square$

Следующее утверждение получит важное применение при доказательстве теоремы 11.10.

ТЕОРЕМА 11.9. Пусть P — некоторый d -многогранник в $\mathbb{R}^d$ (где $d \geq 1$) и x_0 — его вершина. Найдётся такая точка $x'_0 \in \text{int} P$, что гиперплоскость, проходящая через x'_0 и нормальная к вектору $x'_0 - x_0$, отделяет x_0 от всех остальных вершин P .

Доказательство. Можно считать, что $x_0 = v$. Пусть

$x_1, \dots, x_n$ — остальные вершины P и

$$P' := \text{conv} \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Ясно, что P' представляет собой многогранник с вершинами $x_1, \dots, x_n$ и что x_0 не принадлежит P' . Выберем точку $v \in P'$, удовлетворяющую условию

$$\langle v, v \rangle = \min \{ \langle x, x \rangle \mid x \in P' \}. \quad (2)$$

Существование такой точки v вытекает из непрерывности отображения

$$x \mapsto \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

на компактном множестве P' . (Фактически v — единственная точка P' , ближайшая к σ .) Так как $\sigma \notin P'$, то

$$0 < \langle v, v \rangle. \quad (3)$$

Мы утверждаем, что

$$\langle v, v \rangle = \min \{ \langle v, x \rangle \mid x \in P' \} \quad (4)$$

(а значит, $H(v, \alpha)$ с $\alpha := \langle v, v \rangle$ представляет собой опорную гиперплоскость к P' в точке v). Действительно, пусть $x \in P'$ и $\lambda \in]0, 1[$. Тогда $\lambda x + (1-\lambda)v$ принадлежит P' , откуда в силу (2)

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &\leq \langle \lambda x + (1-\lambda)v, \lambda x + (1-\lambda)v \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\lambda(\langle v, x \rangle - \langle v, v \rangle) + \lambda^2 \langle v-x, v-x \rangle. \end{aligned}$$

Это даёт (после деления на 2λ)

$$\langle v, v \rangle - \langle v, x \rangle \leq (\lambda/2) \langle v-x, v-x \rangle.$$

Это неравенство выполнено для любого $\lambda \in]0, 1[$. По непрерывности оно верно и при $\lambda = 0$, чем (4) и доказано. Далее, из (3) и (4) следует, что

$$\langle v, x_i \rangle > 0, \quad i=1, \dots, n.$$

Но тогда, по непрерывности, неравенства

$$\langle u, x_i \rangle > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

выполнены и для всех u из некоторого шара $B(v, \varepsilon)$. В частности, v не принадлежит $B(v, \varepsilon)$. Пусть u_0 — некоторая точка из пересечения $B(v, \varepsilon) \cap \text{int } P$ (см. утверждение (с) теоремы 3.4). Тогда $H(u_0, 0)$ представляет собой гиперплоскость, проходящую через v и такую, что все вершины $x_1, \dots, x_n$ лежат строго по одну сторону от неё. Значит, для достаточно малых λ , $0 < \lambda < 1$, гиперплоскость H , параллельная $H(u_0, 0)$ и проходящая через $x'_0 := \lambda u_0$, отделяет v от $x_1, \dots, x_n$. Наконец, ясно, что H нормальна к вектору $x'_0 - x_0 (= x'_0 = \lambda u_0)$, а из теоремы 3.3 следует, что $x'_0 \in \text{int } P$, так как $x'_0 \in]v, u_0[$. $\square$

Одно из приложений теоремы 11.9 — приводимая ниже теорема. Он показывает, как, используя операцию взятия поляр, строить многогранники, эквивалентные данному и обладающие нужными свойствами. Её доказательство основано на том наблюдении, что если P и $x+P$ оба имеют v внутренней точкой, то многогранники P^0 и $(x+P)^0$ обязательно эквивалентны, так как P^0 двойствен к P , $(x+P)^0$ двойствен к $x+P$, а P и $x+P$ эквивалентны. Теорема 11.10 понадобится нам в § 19.

ТЕОРЕМА 11.10. Для всякого d -многогранника P в $\mathbb{R}^d$ и всякой его гиперграни F найдётся эквивалентный d -многогранник P_1 в $\mathbb{R}^d$, такой что ортогональная проекция $\mathbb{R}^d$ на гиперплоскость, натянутую на гипергрань F_1 многогранника P_1 , соответствующую гиперграни F , отображает $P_1 \setminus F_1$ в $\text{ri } F_1$.

Доказательство. Можно считать, что $v \in \text{int } P$. Пусть $Q := P^0$, так что $Q^0 = P$, и пусть y_0 — вершина Q , сопряжённая к F (см. теорему 9.8). Обозначим остальные вершины Q через $y_1, \dots, y_n$. В силу теоремы 11.9 найдётся такая точка $y'_0 \in \text{int } Q$, что

$$\langle y_i, y_0 - y'_0 \rangle < \langle y'_0, y_0 - y'_0 \rangle < \langle y_0, y_0 - y'_0 \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Положим $Q_1 := Q - y_0'$. Ясно, что это d -многогранник, для которого y_0' является внутренней точкой. Вершинами Q_1 служат точки $y_i - y_0'$, $i = 0, \dots, n$. Пусть $P_1 := Q_1^0$. Так как Q и Q_1 эквивалентны, то эквивалентны P и P_1 (при очевидном изоморфизме решёток). Гипергрань F_1 многогранника P_1 , соответствующая F , разумеется, сопряжена к вершине $y_0 - y_0'$ многогранника Q_1 . Значит,

$$\text{aff } F_1 = H(y_0 - y_0', 1).$$

Для всякой точки $x \in \mathbb{R}^d$ её ортогональной проекцией на $\text{aff } F_1$ служит точка $x' = x + \lambda(y_0 - y_0')$, где λ определяется соотношением

$$\begin{aligned} 1 &= \langle x', y_0 - y_0' \rangle \\ &= \langle x, y_0 - y_0' \rangle + \lambda \langle y_0 - y_0', y_0 - y_0' \rangle, \end{aligned}$$

т. е.

$$\lambda = \frac{1 - \langle x, y_0 - y_0' \rangle}{\|y_0 - y_0'\|^2}.$$

Далее, в силу утверждения (а) теоремы 9.1

$$P_1 = \bigcap_{i=0}^n K(y_i - y_0', 1).$$

Поэтому для $x \in P_1$ мы имеем $\langle x, y_i - y_0' \rangle \leq 1$ при $i = 0, \dots, n$, причём $\langle x, y_0 - y_0' \rangle < 1$ для $x \in P_1 \setminus F_1$. Следовательно, для точек $x \in P_1 \setminus F_1$ и их ортогональных проекций x' на $\text{aff } F_1$ (см. выше)

$$\begin{aligned} \langle x', y_i - y_0' \rangle &= \langle x, y_i - y_0' \rangle + \lambda \langle y_0 - y_0', y_i - y_0' \rangle \\ &\leq 1 + \lambda \langle y_0 - y_0', y_i - y_0' \rangle < 1 \end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, n$, поскольку $\lambda > 0$ и $\langle y_0 - y_0', y_i - y_0' \rangle < 0$. Это показывает, что

$$x' \in \text{int} K(y_i - y_0', 1)$$

при $i = 1, \dots, n$ и, значит,

$$x' \in \text{int} \bigcap_{i=1}^n K(y_i - y_0', 1).$$

Так как

$$F_1 = H(y_0 - y_0', 1) \cap \bigcap_{i=1}^n K(y_i - y_0', 1),$$

то $x' \in \text{ri } F_1$, что и требовалось доказать. $\square$

Наша следующая теорема даёт подробное описание гранной структуры многогранников вида $P' = H \cap P$, где H — гиперплоскость, а P — многогранник, внутренность которого пересекается с H . Аналогичным образом может быть описана и гранная структура многогранников вида $P' = K \cap P$, где K — замкнутое полупространство, а P — многогранник, внутренность которого пересекается с гиперплоскостью H , ограничивающей K . После доказательства теоремы мы обсудим один важный частный случай.

ТЕОРЕМА 11.11. Пусть P — некоторый α -многогранник в $\mathbb{R}^d$, H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условиям

$$H \cap \text{int } P \neq \emptyset, \quad H \cap \text{ext } P = \emptyset,$$

и K обозначает одно из двух замкнутых полупространств, ограниченных этой гиперплоскостью. Тогда

- (а) Множество $P' := K \cap P$ представляет собой α -многогранник, а $H \cap P$ — его гипергрань;
- (б) Если F — такая грань P , что $K \cap F \neq \emptyset$, то $F' := K \cap F$ — грань P' и $\dim F' = \dim F$;
- (с) если F' — грань P' , то либо F' является гранью гиперграни $H \cap P$, либо существует и притом только одна грань F многогранника P , такая что $F' = K \cap F$.

Доказательство. (а) Это очевидно (см. следствие 9.4).

(б) Ясно, что F' — грань P' . Если $F \subset K$, то утверждаемое равенство размерностей очевидно. Если $F \not\subset K$, то точки F должны найтись с обеих сторон H (в самом деле, если бы это было не так, то H была бы опорной гиперплоскостью к F , причём $F \subset (\mathbb{R}^d \setminus K) \cup H$, а это противоречит условию, что

H не содержит ни одной вершины P). Но тогда H , в силу импликации (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 4.1, должна пересекаться с $\text{ri } F$. Ясно, что отсюда следует равенство $\dim F' = \dim F$.

(с) Предположим, что F' не является гранью $H \cap P$. Тогда F' не содержится в $H \cap P$ (см. теорему 5.2) и, значит, в силу импликации (b) $\Rightarrow$ (a) из теоремы 4.1, $H \cap \text{ri } F' = \emptyset$.

Сначала докажем единственность F' . Если F_1 и F_2 — две грани P , такие что $F' = K \cap F_1 = K \cap F_2$, то мы имеем также $F' = K \cap (F_1 \cap F_2)$. Но тогда, в силу (b), $\dim F_1 = \dim F_2 = \dim (F_1 \cap F_2)$ и, значит, по теореме 5.2 и следствию 5.5, $F_1 = F_2$.

Теперь установим существование F' . Возьмём какую-нибудь точку $x_0 \in \text{ri } F'$. Ясно, что $x_0 \in P \cap \text{int } K$, поскольку $H \cap \text{ri } F' = \emptyset$. Пусть H' — опорная гиперплоскость к P' , такая что $H' \cap P' = F'$. Тогда H' служит и опорной гиперплоскостью к P . В самом деле, если бы некоторая точка y из $P \setminus K$ находилась бы "не в той стороне" от H' , то и весь интервал $[x_0, y]$ находился бы там же; но $[x_0, y]$ содержит целый отрезок, состоящий из точек множества $K \cap P = P'$, и, значит, гиперплоскость H' не могла бы быть опорной к P' . Итак, H' — опорная гиперплоскость к P . Но в таком случае $F := H' \cap P$ есть грань P , для которой $K \cap F = F'$, как нам и надо. $\square$

Если в теореме 11.11 вершины P , не принадлежащие K , являются вершинами некоторой грани F , то говорят, что многогранник P' получен из P срезкой грани F . Операция среза порождает одну "новую" гипергрань. Все "старые" гиперграни P при этом "выживают"¹, за исключением, конечно, самой F , если она — гипергрань. Операция, двойственная к срезке гиперграни, называется вытягиванием вершины. Она состоит в построении выпуклой оболочки рассматриваемого многогранника и одной "новой" вершины (вне многогранника), расположенной так, что при образовании выпуклой оболочки одна "старая" вершина исчезает. Операция, двойственная к срезке вершины, представляет собой добавление пирамиды над одной из гиперграней. Точное описание операции, двойст-

¹ Имеется в виду, что у этих гиперграней сохраняется аффинная оболочка. — Прим. ред.

венной к срезке, может быть дано в терминах поляра (см. теорему 9.1).

У п р а ж н е н и е

11.1. Пусть F_1, F_2 и F_3 — такие грани многогранника P , что $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3$, и пусть Q — такой многогранник, что решётка $(\mathcal{F}(F_3/F_1), \subset)$ изоморфна решётке $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Обозначим соответствующий изоморфизм через φ . Докажите, что решётка $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ изоморфна $(\mathcal{F}(\varphi(F_2)), \subset)$, а $(\mathcal{F}(F_3/F_2), \subset)$ изоморфна $(\mathcal{F}(Q/\varphi(F_2)), \subset)$.

§ 12. ПРОСТЫЕ И СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В этом параграфе рассматриваются два важных класса многогранников, а именно простые и симплициальные¹ многогранники. Оба этих класса определяются некоторыми условиями "невыврожденности"; на самом деле эти условия двойственны. Ввиду такой "невыврожденности" исследовать упомянутые многогранники значительно легче, чем произвольные. Фактически (правда, за одним важным исключением) комбинаторная теория, которая будет нами развита в гл. 3, имеет дело лишь с простыми и симплициальными многогранниками.

В силу их двойственности нет никаких формальных оснований отдавать предпочтение какому-то одному из указанных двух классов. Тем не менее некоторые задачи удобнее рассматривать в терминах простых многогранников.

Напомним, что e -многогранник является e -симплексом, если его вершины образуют аффинно-независимое семейство, состоящее из $e+1$ элементов (см. §§ 2 и 7). Мы начнем с обсуждения гранной структуры симплексов.

ТЕОРЕМА 12.1. Пусть $\mathcal{S}$ — некоторый e -симплекс в $\mathbb{R}^d$, а F — собственная грань $\mathcal{S}$. Тогда F — также симплекс.

¹ Отметим, что соответствующие английские термины (simple и simplicial) имеют общий корень. — Прим. ред.

Доказательство. Вершины грани F — это те из вершин S , которые принадлежат F (теорема 7.3). Любое подсемейство аффинно-независимого семейства само аффинно-независимо. Так как, в силу утверждения (с) теоремы 7.2, F совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин, мы заключаем, что F является симплексом. $\square$

ТЕОРЕМА 12.2. Пусть S — некоторый e -симплекс в $\mathbb{R}^d$, X — непустое подмножество в $\text{ext } S$, и пусть $F := \text{conv } X$. Тогда F — грань S и $\text{ext } F = X$.

Доказательство. Пусть $\text{ext } S = \{x_1, \dots, x_{e+1}\}$, а $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Чтобы доказать, что F служит гранью S , мы установим, что если y_0 и y_1 — две точки из S , такие что для некоторого $t \in]0, 1[$ точка

$$y_t := (1-t)y_0 + ty_1$$

принадлежит F , то y_0 и y_1 также должны принадлежать F . Каждая точка x из S допускает единственное представление в виде

$$x = \sum_{i=1}^{e+1} \lambda_i x_i. \quad (1)$$

Точки x из S , принадлежащие F , могут быть охарактеризованы тем свойством, что $\lambda_i = 0$ для $i = k+1, \dots, e+1$. Итак, мы имеем

$$y_0 = \sum_{i=1}^{e+1} \lambda_{0i} x_i$$

и

$$y_1 = \sum_{i=1}^{e+1} \lambda_{1i} x_i,$$

откуда

$$y_t = \sum_{i=1}^{e+1} \lambda_i ((1-t)\lambda_{0i} + t\lambda_{1i}) x_i.$$

Но мы также знаем, что $y_t \in F$, т. е.

$$y_t = \sum_{i=1}^k \lambda_{ti} x_i.$$

В силу единственности представления (1) получаем

$$(1-t)\lambda_{0i} + t\lambda_{1i} = 0, \quad i = k+1, \dots, e+1.$$

Отсюда видно, что

$$\lambda_{0i} = \lambda_{1i} = 0, \quad i = k+1, \dots, e+1,$$

т. е. y_0 и y_1 принадлежат F , что и требовалось показать. Наконец, импликация (a) $\Rightarrow$ (b) из теоремы 7.2 показывает, что

$$\text{ext } F \subset \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Обратное включение очевидно (см. утверждение о необходимости из теоремы 5.2). $\square$

Две приведённые выше теоремы содержат основные сведения о гранях симплексов. Рассмотрим некоторые следствия.

СЛЕДСТВИЕ 12.3. Пусть S — произвольный e -симплекс в $\mathbb{R}^d$ и F — его j -грань, где $-1 \leq j \leq e$. Тогда для $k = j, \dots, e$ число k -граней S , содержащих F , равно

$$\binom{e-j}{k-j}.$$

Доказательство. В силу теорем 12.1 и 12.2 существует взаимно-однозначное соответствие между k -гранями S , содержащими F , и выборками по $(k+1) - (j+1)$ вершин из числа тех $(e+1) - (j+1)$ вершин S , которые не принадлежат F . Отсюда сразу следует наше утверждение. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 12.4. Пусть S — некоторый e -симплекс в $\mathbb{R}^d$. Для $-1 \leq k \leq e$ число его k -граней равно

$$\binom{e+1}{k+1}.$$

Доказательство. В следствии 12.3 берём $j = -1$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 12.5. Пусть S — некоторый e -симплекс в $\mathbb{R}^d$ и F — некоторая его k -грань, где $-1 \leq k \leq e$. Тогда число тех гиперграней S , которые содержат F , равно $e - k$.

Доказательство. Согласно следствию 12.3, число гиперграней S , содержащих заданную k -грань F , равно

$$\binom{e-k}{(e-1)-k} = e-k. \square$$

Отметим, что k -грань F e -симплекса S , о которой идёт речь в следствии 12.5, в силу теоремы 10.4 совпадает с пересечением тех $e-k$ гиперграней, которые её содержат. Обратно, пересечение любых $e-k$ гиперграней представляет собой k -грань:

СЛЕДСТВИЕ 12.6. Пусть S — некоторый e -симплекс в $\mathbb{R}^d$ и $F_1, \dots, F_{e-k}$ — его гипергрani, где $-1 \leq k \leq e-1$. Тогда пересечение $F_1 \cap \dots \cap F_{e-k}$ представляет собой k -грань симплекса S .

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_{e+1}$ — вершины S . В силу теорем 12.1 и 12.2, каждая гипергрань F_j является выпуклой оболочкой некоторых e из $e+1$ вершин. Можно считать, что

$$F_j = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_{e+1}\} \setminus \{x_j\}), \quad j=1, \dots, e-k.$$

Данная точка x из S принадлежит F_j тогда и только тогда, когда в (единственном) представлении

$$x = \sum_{i=1}^{e+1} \lambda_i x_i$$

мы имеем $\lambda_j = 0$. Поэтому x принадлежит пересечению $F_1 \cap \dots \cap F_{e-k}$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_{e-k} = 0$,

т.е. когда x принадлежит множеству

$$\text{conv} \{x_{e-k+1}, \dots, x_{e+1}\}.$$

Но это множество ввиду теоремы 12.2 служит гранью S , а по теореме 12.1 его размерность равна k . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 12.7. Пусть S — некоторый e -симплекс в $\mathbb{R}^d$, а T — двойственный к нему e -многогранник. Тогда T — также e -симплекс.

Доказательство. Из следствия 12.4 вытекает, что симплекс S имеет $e+1$ гиперграней. Как двойственный к нему многогранник T имеет $e+1$ вершин (теорема 10.3). Но e -многогранники с $e+1$ вершинами — это симплексы. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 12.8. Пусть P — некоторый e -многогранник в $\mathbb{R}^d$. Он является e -симплексом в том и только том случае, если число его гиперграней равно $e+1$.

Доказательство. Если P есть e -симплекс, то по следствию 12.4 у него $e+1$ гиперграней. Обратно, если P представляет собой e -многогранник с $e+1$ гипергранями, то любой двойственный к нему многогранник Q будет, в силу теоремы 10.3, e -многогранником с $e+1$ вершинами. Значит, Q есть e -симплекс, а потому, в силу следствия 12.7, e -симплексом является и P . $\square$

Перейдём теперь к симплициальным и простым многогранникам.

Многогранник P размерности d называется симплициальным, если для $k=0, \dots, d-1$ любая его k -грань имеет в точности $k+1$ вершин (т.е. любая его собственная грань представляет собой симплекс).

В силу теоремы 12.1 любой симплекс симплициален, но, разумеется, есть и много других симплициальных многогранников.

В определении симплициального многогранника достаточно потребовать, чтобы симплексами были все гипергрani:

ТЕОРЕМА 12.9. Многогранник P симплициален тогда (и только тогда), когда каждая его гипергрань есть симплекс.

Доказательство. Пусть F – собственная грань P . По следствию 9.7 найдётся гипергрань G многогранника P , которая содержит F . Согласно теореме 5.2, F есть грань G , а так как G по предположению – симплекс, то F – симплекс в силу теоремы 12.1. $\square$

Пусть F – некоторая k -грань d -многогранника P , где $0 \leq k \leq d-1$. Тогда по теореме 10.4 найдутся по крайней мере $d-k$ гиперграней P , содержащих F (и F совпадает с пересечением этих гиперграней). Многогранник P размерности d называется простым, если для $k=0, \dots, d-1$ каждая его k -грань содержится ровно в $d-k$ его гипергранях.

В силу следствия 12.5 каждый симплекс прост, но, конечно, множество простых многогранников не исчерпывается симплексами.

Следующее утверждение показывает, что два введённых нами понятия двойственны друг другу:

ТЕОРЕМА 12.10. Пусть P и Q – двойственные d -многогранники. Тогда P прост в том и только том случае, если Q симплициален.

Доказательство. Пусть F и G – собственные грани многогранников P и Q соответственно, отвечающие друг другу при некотором антиизоморфизме решётки $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Тогда в силу теоремы 10.3

$$\dim G = d-1 - \dim F.$$

Далее, по двойственности, утверждение, что F содержится в j гипергранях P , равносильно утверждению, что G содержит j вершин Q . Поэтому утверждение, что каждая k -грань P принадлежит в точности $d-k$ гиперграням, равносильно утверждению, что каждая $(d-1-k)$ -грань Q имеет в точности $d-k$ вершин, $k=0, \dots, d-1$, т.е. что всякая собственная грань Q представляет собой симплекс. Тем самым теорема доказана. $\square$

Следующая теорема в известном смысле двойственна теореме 12.9.

ТЕОРЕМА 12.11. Многогранник P размерности d прост тогда (и только тогда), когда каждая его вершина принадлежит в

точности d гиперграням.

Доказательство. Пусть Q — многогранник, двойственный к P . Если каждая вершина P принадлежит в точности d гиперграням, то по теореме 10.3 любая гипергрань Q имеет в точности d вершин. Следовательно, любая гипергрань Q представляет собой симплекс и, значит, в силу теоремы 12.9, многогранник Q симплициален. Но тогда, согласно теореме 12.10, многогранник P прост. $\square$

Приводимую ниже характеризацию простых многогранников полезно сравнить с теоремой 10.5:

ТЕОРЕМА 12.12. Многогранник P размерности d прост тогда и только тогда, когда каждая его вершина инцидентна в точности d рёбрам.

Доказательство. Пусть Q — двойственный к P многогранник и ψ — некоторый антиизоморфизм $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$.

Пусть x — вершина P . Тогда число инцидентных ей рёбер P равно числу $(d-2)$ -граней $(d-1)$ -грани $\psi(\{x\})$ многогранника Q (см. теорему 10.3). Значит, число рёбер, инцидентных вершине P , тогда и только тогда равно d для любой вершины P , когда число $(d-2)$ -граней $(d-1)$ -грани Q равно d для любой $(d-1)$ -грани Q . Но, в силу следствия 12.8, $(d-1)$ -многогранник имеет d гиперграней, если и только если он является симплексом. Поэтому наше утверждение вытекает из теорем 12.10 и 12.9. $\square$

Заметим, что в теореме 12.12 слова "инцидентна в точности d рёбрам" можно заменить на "смежна в точности с d вершинами".

Приведём ещё одну характеризацию простых многогранников:

ТЕОРЕМА 12.13. Многогранник является простым тогда и только тогда, когда каждая его вершинная фигура представляет собой симплекс.

Доказательство. Пусть Q — многогранник, двойственный к P . Тогда гиперграницы Q двойственны к вершинным фигурам P (теорема 11.5). Поэтому наше утверждение вытекает из теорем 12.10 и 12.9. $\square$

Установим теперь некоторые свойства простых многогранников, нужные нам в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 12.14. Пусть P — простой d -многогранник и $F_1, \dots, F_{d-k}$ — его гипергрani, где $0 \leq k \leq d-1$. Положим

$$F := \bigcap_{i=1}^{d-k} F_i$$

и допустим, что $F \neq \emptyset$. Тогда F представляет собой k -грань P , и гипергранями $F_1, \dots, F_{d-k}$ исчерпывается множество гиперграней P , содержащих F .

Доказательство. Пусть Q — многогранник, двойственный к P , и ψ — антиизоморфизм $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. По построению F — наибольшая среди граней, содержащихся во всех F_i , а потому $\psi(F)$ — наименьшая из граней, содержащих все $\psi(F_i)$. Из теоремы 10.3 вытекает, что $\psi(F)$ — собственная грань и $\psi(F_i)$ — вершины Q . Поэтому $\psi(F)$ является, в силу теоремы 12.10, симплексом, и других вершин, кроме $\psi(F_i)$, у $\psi(F)$ нет. Поскольку число гиперграней F_i равно $d-k$, мы видим, что

$$\dim \psi(F) = (d-k)-1.$$

Отсюда по двойственности следует, что, кроме F_i , никаких других гиперграней P , содержащих F , нет и

$$\dim F = k$$

(см. теорему 10.3). $\square$

ТЕОРЕМА 12.15. Пусть P — простой d -многогранник. Тогда и каждая его собственная грань тоже является простым многогранником.

Доказательство. Пусть F — собственная грань P , а x — вершина F . Положим $k := \dim F$ и докажем, что имеется в точности k гиперграней грани F , содержащих x (см. теорему 12.11). Пусть Q — многогранник, двойственный к P , и ψ — некоторый антиизоморфизм $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$.

По теореме 10.3 число тех гиперграней F , которые содержат x , равно числу $\binom{d-1-(k-1)}{(d-1-k)}$ -граней многогранника Q , содержащихся в его гипергранях $\psi(\{x\})$ и содержащих его $(d-1-k)$ -грань $\psi(F)$. Но, согласно теореме 12.10, Q — симплициальный многогранник, а потому $\psi(\{x\})$ представляет собой $(d-1)$ -симплекс. Итак, речь идёт о числе $\binom{(d-1)-(d-1-k)}{(d-k)-(d-1-k)}$ -граней некоторого $(d-1)$ -симплекса, содержащих данную $(d-1-k)$ -грань этого симплекса. Следствие 12.3 утверждает, что это число равно

$$\binom{(d-1)-(d-1-k)}{(d-k)-(d-1-k)} = \binom{k}{1} = k,$$

что и требовалось доказать. $\square$

ТЕОРЕМА 12.16. Пусть P — простой d -многогранник. Тогда при $0 \leq j \leq k \leq d$ число тех его k -граней, которые содержат заданную j -грань, равно

$$\binom{d-j}{d-k}.$$

Доказательство. Для $k = d$ доказывать нечего. Для $k < d$ обозначим через Q многогранник, двойственный к P , и пусть ψ — некоторый антиизоморфизм $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Пусть F — данная j -грань P . Тогда $\psi(F)$ представляет собой $(d-1-j)$ -грань Q , а по теореме 10.3 число k -граней P , содержащих F , равно числу $(d-1-k)$ -граней $\psi(F)$. В силу теоремы 12.10, $\psi(F)$ — симплекс. Значит, согласно следствию 12.4, искомое число равно

$$\binom{(d-1-j)+1}{(d-1-k)+1} = \binom{d-j}{d-k},$$

как и утверждалось. $\square$

ТЕОРЕМА 12.17. Пусть P — простой d -многогранник, x_0 — какая либо из его вершин, $x_1, \dots, x_k$ — некоторые из вершин P , смежных с x_0 , и F — наименьшая из граней P , содержащих $[x_0, x_1], \dots, [x_0, x_k]$. Тогда

- (a) $\dim F = k$;
 (b) кроме $[x_0, x_1], \dots, [x_0, x_k]$, у F' нет никаких других рёбер, инцидентных x_0 .

Доказательство. Пусть Q — многогранник, двойственный к P , и ψ — антиизоморфизм $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Положим $G := \psi(F)$. По двойственности, G — это наибольшая грань Q , содержащаяся в $(d-2)$ -гранях $\psi([x_0, x_1]), \dots, \psi([x_0, x_k])$ $(d-1)$ -грани $\psi(\{x_0\})$ многогранника Q (см. теорему 10.3). Так как (по теореме 12.10) Q симплиціален, то $\psi(\{x_0\})$ представляет собой $(d-1)$ -симплекс. Следствие 12.6 показывает тогда, что

$$\dim G = d - 1 - k.$$

Но в силу теоремы 10.3 мы имеем также

$$\dim G = d - 1 - \dim F,$$

откуда $\dim F = k$, чем утверждение (a) и доказано.

Чтобы доказать (b), заметим, что в силу следствия 12.5 число $(d-2)$ -граней $(d-1)$ -грани $\psi(\{x_0\})$, которые содержат G , равно k . Значит, по двойственности, и рёбер F' , содержащих x_0 , имеется только k . $\square$

Отметим, что, после того как утверждение (a) теоремы 12.17 уже доказано, утверждение (b) вытекает также из теорем 12.15 и 12.12.

Отметим также, что грань F' из теоремы 12.17 может быть охарактеризована и как наименьшая грань P , содержащая $x_0, x_1, \dots, x_k$, и утверждение (b) равносильно утверждению, что $x_1, \dots, x_k$ — единственные вершины F' , смежные с x_0 .

ТЕОРЕМА 12.18. Пусть P — простой d -многогранник в $\mathbb{R}^d$, x_0 — его вершина и P' — многогранник, полученный из P срезкой вершины x_0 . Тогда P' также представляет собой простой d -многогранник. Далее,

$$f_0(P') = f_0(P) + d - 1$$

$$f_j(P') = f_j(P) + \binom{d}{j+1}, \quad j = 1, \dots, d-1.$$

Доказательство. Пусть K — замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^d$, такое что $P' = K \cap P$, а H — гиперплоскость, ограничивающая K .

Чтобы убедиться, что многогранник P' — простой, мы покажем, что каждая вершина P' инцидентна в точности d рёбрам P' (см. теорему 12.12). Данная вершина x многогранника P' является либо вершиной гиперграни $H \cap P$, либо вершиной P , не принадлежащей H (утверждение (с) теоремы 11.11). Если имеет место второй из этих двух случаев, то в силу теоремы 12.12 и утверждений (b) и (с) теоремы 11.11 число рёбер P' , инцидентных x , равно d . Если же имеет место первый случай, то x есть точка, где некоторое ребро F многогранника P пересекает H (см. утверждение (d) теоремы 11.11). Тогда рёбра P' , инцидентные x , — это ребро $K \cap F$ и те из рёбер $H \cap P$, которые инцидентны x . Но (по теореме 12.13) $H \cap P$ представляет собой $(d-1)$ -симплекс, и поэтому (в силу следствия 12.3) число рёбер $H \cap P$, инцидентных x , равно $d-1$. Итак, многогранник P' — простой.

Как уже отмечалось, $H \cap P$ является $(d-1)$ -симплексом. Значит, по следствию 12.4, число его j -граней равно

$$\binom{d}{j+1}, \quad j = 0, \dots, d-1.$$

Указанные в формулировке теоремы значения $f_j(P')$, $j = 0, \dots, d-1$ получаются теперь простым применением теоремы 11.11. $\square$

Любой d -симплекс одновременно и прост, и симплициален. Мы закончим данный параграф доказательством того, что при $d \neq 2$ верно и обратное. (При $d = 0, 1$ это очевидно. Что касается случая $d = 2$, то всякий 2-многогранник прост и симплициален, однако не все 2-многогранники — симплексы. Таким образом, при $d = 2$ обратное утверждение теряет силу.)

ТЕОРЕМА 12.19. Пусть $d \neq 2$. Тогда всякий d -многогранник P , одновременно простой и симплицальный, является симплексом.

Доказательство. Ввиду сказанного выше можно считать, что $d \geq 3$. Пусть x_0 — произвольная вершина P и $x_1, \dots, x_d$ — смежные с ней вершины (см. теорему 12.12). Положим

$$S = \text{conv} \{x_0, x_1, \dots, x_d\}.$$

Из следствия 11.7 вытекает, что S — это d -симплекс с вершинами $x_0, x_1, \dots, x_d$. Пусть x_i и x_j — любые две из вершин $x_1, \dots, x_d$ и F — наименьшая грань P , содержащая $[x_0, x_i]$ и $[x_0, x_j]$. Тогда, в силу утверждения (а) теоремы 12.17, F представляет собой 2-грань. Далее, так как P симплицален, то F — симплекс. Иными словами, F — треугольник, а поскольку, в силу теоремы 5.2, x_0, x_i, x_j — его вершины, то $\text{ext } F = \{x_0, x_i, x_j\}$. В частности, $[x_i, x_j]$ — ребро F , значит, по теореме 5.2, и ребро P . Пусть теперь K — произвольное опорное полупространство к S и x_k — любая вершина S , лежащая в гиперплоскости H , ограничивающей K . Тогда очевидно, что все d рёбер S , инцидентных x_k , принадлежат K . Но так как эти рёбра, как было только что установлено, являются также и рёбрами P , а по теореме 12.12 число рёбер P , инцидентных x_k , равно d , мы видим, что все рёбра P , инцидентные x_k , принадлежат K . Применяя теперь теорему 11.6, заключаем, что K служит опорным полупространством также и к P . Значит, каждое полупространство, опорное к S , является опорным и к P . Поскольку S совпадает с пересечением своих опорных полупространств (теорема 4.5), то $P \subset S$. С другой стороны, очевидно, что $S \subset P$, и, таким образом, $P = S$, чем и доказано, что P — симплекс. $\square$

У п р а ж н е н и я

- 12.1. Дайте прямое доказательство теоремы 12.2 для случая, когда X является e -элементным (т. е. состоящим из e элементов) подмножеством $(e+1)$ -элементного множества $\text{ext } S$. Используя этот результат, докажите теорему 12.2 по индукции.

- 12.2. Путем подсчёта инцидентностей вершин и рёбер докажите, что $df_0(P) = 2f_1(P)$ для любого простого d -многогранника P . (Это соотношение эквивалентно уравнению Дена – Коммервилля в случае $d=1$; см. теорему 17.1.)
- 12.3. Пусть F – грань простого d -многогранника P . Докажите, что её гиперграни – это в точности грани вида $F \cap G$, где G – гипергрань P , удовлетворяющая условиям $F \cap G \neq \emptyset$ и $F \not\subset G$.
- 12.4. Пусть P – произвольный d -многогранник и P' – многогранник, полученный из P последовательной срезкой всех его гиперграней. Докажите, что многогранник P' является простым. Проверьте, что $f_{d-1}(P') = f_{d-1}(P)$ и $f_j(P') \geq f_j(P)$ для $j = 0, \dots, d-2$. Докажите, что если некоторая k -грань F многогранника P принадлежит более чем $d-k$ гиперграням, то $f_j(P') > f_j(P)$ для $j = 0, \dots, k+1$.
- 12.5. Многогранник P размерности d называют k -симплициальным, если каждая его k -грань является симплексом; и k -простым, если каждая его $(d-1-k)$ -грань принадлежит в точности $k+1$ гиперграням.

Проверьте следующие утверждения. Если P и Q двойственны, то P тогда и только тогда k -симплициален, когда Q является k -простым. Любой d -многогранник 0-симплициален, 1-симплициален, 0-прост и 1-прост. Многогранник размерности d симплициален (соотв. прост) тогда и только тогда, когда он $(d-1)$ -симплициален (соотв. $(d-1)$ -прост). Если многогранник P является k -симплициальным (соотв. k -простым), то он также и h -симплициален (соотв. h -прост) при $h \leq k$.

Докажите, что если d -многогранник k_1 -симплициален и k_2 -прост, причём $k_1 + k_2 \geq d + 1$, то он представляет собой симплекс.

§ 13. ЦИКЛИЧЕСКИЕ МНОГОГРАННИКИ

Как легко видеть, 3-симплексы – это единственные 3-многогранники, обладающие тем свойством, что любые две их вершины смежны. Как

ни странно, но при замене числа 3 на любое $d \geq 4$ это утверждение перестает быть верным. В данном параграфе вводится один класс многогранников, доставляющий соответствующие контрпримеры.

Моментная кривая M_d в пространстве $\mathbb{R}^d$ при $d \geq 2$ задаётся параметрически как

$$t \mapsto x(t) := (t, t^2, \dots, t^d), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Она обладает следующим интересным свойством:

ТЕОРЕМА 13.1. Любая гиперплоскость H в $\mathbb{R}^d$ содержит не более d точек кривой M_d .

Доказательство. Пусть $H = H(y, \alpha)$, где

$$y = (\beta_1, \dots, \beta_d).$$

Включение $x(t) \in H(y, \alpha)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 t + \dots + \beta_d t^d = \alpha.$$

Но по основной теореме алгебры существует не более d значений t , которые удовлетворяют этому уравнению. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 13.2. Пусть $t_1, \dots, t_n$ — попарно различные вещественные числа, причём $n \leq d+1$. Тогда семейство $(x(t_1), \dots, x(t_n))$ точек пространства $\mathbb{R}^d$ аффинно-независимо.

Доказательство. Допустим, что, напротив, семейство $(x(t_1), \dots, x(t_n))$ аффинно-зависимо. Тогда все точки $x(t_1), \dots, x(t_n)$ принадлежат некоторому аффинному подпространству A с $\dim A \leq n-2$. Если $n < d+1$, то выберем такие $t_{n+1}, \dots, t_{d+1}$, что $t_i \neq t_j$ для $i, j = 1, \dots, d+1$ и $i \neq j$. Тогда все точки $x(t_1), \dots, x(t_{d+1})$ принадлежат некоторому аффинному подпространству размерности не более

$$(n-2) + (d+1-n) = d-1.$$

Отсюда, в частности, следует, что все точки $x(t_1), \dots, x(t_{d+1})$ принадлежат некоторой гиперплоскости, а это противоречит теореме 13.1. $\square$

Под циклическим многогранником типа $C(n, d)$, где $n \geq d+1$ и $d \geq 2$, мы понимаем всякий многогранник вида

$$P = \operatorname{conv} \{x(t_1), \dots, x(t_n)\},$$

где $t_1, \dots, t_n$ — попарно различные вещественные числа.

Заметим, что в силу следствия 13.2 циклический многогранник типа $C(d+1, d)$ является d -симплексом.

ТЕОРЕМА 13.3. Пусть $P = \operatorname{conv} \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ — циклический многогранник типа $C(n, d)$. Тогда P есть d -многогранник.

Доказательство. Согласно следствию 13.2, любой набор, состоящий из $d+1$ точек $x(t_i)$, где t_i попарно различны, аффинно-независим. Значит,

$$\operatorname{aff} \{x(t_1), \dots, x(t_{d+1})\} = \mathbb{R}^d,$$

откуда и следует, что $\dim P = d$. $\square$

ТЕОРЕМА 13.4. Пусть $P = \operatorname{conv} \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ — циклический многогранник типа $C(n, d)$. Тогда

$$\operatorname{ext} P = \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}.$$

Доказательство. То что левая часть содержится в правой, вытекает из импликации (a) $\Rightarrow$ (b) теоремы 7.2. Обратно, покажем, что каждая точка $x(t_i)$ является вершиной P . Рассмотрим многочлен $p(t)$ второй степени, заданный формулой

$$\begin{aligned} p(t) &:= -(t - t_i)^2 \\ &= -t_i^2 + 2t_i t - t^2, \end{aligned}$$

и положим

$$y := (2t_i, -1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда

$$p(t) = \langle x(t), y \rangle - t_i^2.$$

Так как $p(t) \leq 0$ для всех $t \in R$, причём $p(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = t_i$, то $H(y, t_i^2)$ служит опорным полупространством к P , причём

$$H(y, t_i^2) \cap P = \{x(t_i)\}.$$

Значит, $x(t_i) \in \text{ext } P$. $\square$

ТЕОРЕМА 13.5. Всякий циклический многогранник P типа $C(n, d)$ симплициален.

Доказательство. Пусть $P = \text{conv}\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$. Поскольку, в силу теоремы 13.3, P представляет собой d -многогранник, то по теореме 12.9 достаточно доказать, что любая гипергрань P является $(d-1)$ -симплексом. Итак, рассмотрим некоторую гипергрань F многогранника P . Её вершинами служат некоторые из вершин P (теорема 13.4), скажем $x(t_{i_1}), \dots, x(t_{i_k})$. Ясно, что $k \geq d$, причём равенство $k = d$ выполнено тогда и только тогда, когда F является $(d-1)$ -симплексом. Заметим теперь, что $\text{aff } F$ представляет собой гиперплоскость, которая содержит k точек $x(t_{i_1}), \dots, x(t_{i_k})$. Поэтому теорема 13.1 показывает, что $k \leq d$, а значит, $k = d$, что и требовалось установить. $\square$

Из теоремы 13.5 следует, что если некоторые k вершин циклического многогранника P составляют множество вершин какой-либо из его граней, то эта последняя обязательно должна быть $(k-1)$ -гранью. Ниже мы дадим описание тех k -элементных подмножеств множества вершин многогранника P , которые являются множествами вершин его граней.

Для этого надо ввести некоторые понятия. Пусть

$$P = \text{conv}\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$$

— циклический многогранник типа $C(n, d)$. Допустим, что

$$t_1 < \dots < t_n$$

(ясно, что это допущение не ограничивает общности). Пусть X — произвольное непустое подмножество множества $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$.

Под его компонентой будем понимать всякое непустое подмножество Y в X вида

$$Y = \{x(t_j), x(t_{j+1}), \dots, x(t_{k-1}), x(t_k)\},$$

такое что $x(t_{j-1}) \notin X$ (для $j > 1$) и $x(t_{k+1}) \notin X$ (для $k < n$). Компонента Y называется собственной, если $x(t_1) \notin Y$ и $x(t_n) \notin Y$. Компонента, которая содержит чётное (соотв. нечётное) число точек, называется чётной (соотв. нечётной).

Используя введённые понятия, мы можем теперь рассмотреть случай $k = d$; остальные значения k будут рассмотрены ниже. Условие, фигурирующее в следующей теореме, известно как условие чётности Гейла.

ТЕОРЕМА 13.6. Пусть $P = \text{conv} \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ — циклический многогранник типа $C(n, d)$, где $t_1 < \dots < t_n$, и пусть X — некоторое подмножество множества $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$, содержащее d точек. Для того чтобы X представляло собой множество вершин некоторой гиперграницы P , необходимо и достаточно, чтобы все собственные компоненты X были чётными.

Доказательство. Пусть

$$X = \{x(t_{i_1}), \dots, x(t_{i_d})\}.$$

Заметим, что, по следствию 13.2, $\text{aff } X$ есть гиперплоскость. Из теоремы 13.1 вытекает, что точками $x(t_{i_1}), \dots, x(t_{i_d})$ исчерпываются все вершины P , лежащие в $\text{aff } X$. Положим

$$p(t) := \prod_{\nu=1}^d (t - t_{i_\nu}).$$

Ясно, что $p(t)$ — многочлен степени d . Запишем его в виде

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d,$$

где $a_0, \dots, a_d$ — вещественные числа (причём $a_d = 1$), и положим

$$y := (a_1, \dots, a_d).$$

Тогда

$$p(t) = \langle x(t), y \rangle + a_0.$$

Так как

$$p(t_{i_1}) = \dots = p(t_{i_d}) = 0,$$

мы видим, что

$$x(t_{i_1}), \dots, x(t_{i_d}) \in H(y, -a_0),$$

а значит,

$$H(y, -a_0) = \text{aff } X.$$

Далее, утверждение, что X представляет собой множество вершин некоторой гиперграницы P , равносильно утверждению, что существует такая опорная к P гиперплоскость H , что

$$H \cap \text{ext } P = X.$$

Но, как мы уже убедились, $H(y, -a_0)$ — единственная гиперплоскость, содержащая X . Поэтому X в том и только том случае служит множеством вершин некоторой гиперграницы P , когда $H(y, -a_0)$ служит опорной гиперплоскостью к P , т. е. когда все точки множества

$$(\text{ext } P) \setminus X = \{x(t_1), \dots, x(t_n)\} \setminus \{x(t_{i_1}), \dots, x(t_{i_d})\}$$

расположены по одну сторону от $H(y, -a_0)$.

Предположим, что не все точки из $(\text{ext } P) \setminus X$ находятся по одну сторону от $H(y, -a_0)$. Тогда найдутся такие точки $x(t_j)$ и $x(t_k)$ из $(\text{ext } P) \setminus X$, что $t_j < t_k$, все точки $x(t_l)$ с $j < l < k$ принадлежат $H(y, -a_0)$, а $x(t_j)$ и $x(t_k)$ лежат по разные стороны от $H(y, -a_0)$. Тот факт, что $x(t_j)$ и $x(t_k)$ находятся по разные стороны от $H(y, -a_0)$, означает, что $p(t_j)$ и $p(t_k)$ имеют разные знаки. Но $p(t)$ меняет знак только в точках $t = t_{i_1}, \dots, t_{i_d}$. Значит, между t_j и t_k должно лежать нечётное число точек t_{i_ν} . Иначе говоря, множество

$$Y = \{x(t_{j+1}), \dots, x(t_{k-1})\}$$

является нечётной собственной компонентой X . Тем самым достаточность условия чётности Гейла доказана.

Чтобы доказать его необходимость, проведём те же рассуждения в обратном порядке. А именно, предположим, что X имеет нечётную собственную компоненту, скажем

$$Y = \{x(t_{j+1}), \dots, x(t_{k-1})\}.$$

По определению собственной компоненты, точки $x(t_j)$ и $x(t_k)$ принадлежат $(\text{ext } P) \setminus X$. Поэтому $p(t_j)$ и $p(t_k)$ отличны от нуля, а так как $p(t)$ при возрастании t от t_j до t_k меняет знак в точках $t = t_{j+1}, \dots, t_{k-1}$, мы видим, что $p(t_j)$ и $p(t_k)$ должны иметь разные знаки. Это показывает, что $x(t_j)$ и $x(t_k)$ лежат по разные стороны от $H(y, -a_0)$. Доказательство завершено. $\square$

Используя теорему 13.6, разберём теперь случай $k < d$.

ТЕОРЕМА 13.7. Пусть $P = \text{conv} \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ — циклический многогранник типа $C(n, d)$, где $t_1 < \dots < t_n$. Пусть, далее, X — подмножество множества $\{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$, состоящее из k точек, причём $k \leq d$. Для того чтобы X было множеством вершин некоторой $(k-1)$ -границы P , необходимо и достаточно, чтобы число нечётных собственных компонент X не превышало $d - k$.

Доказательство. Множество X является множеством вершин некоторой грани P тогда и только тогда, когда у P существует такая гипергрань G , что

$$X \subset \text{ext } G. \quad (1)$$

В самом деле, если $X = \text{ext } F$ для некоторой грани F многогранника P , то по следствию 9.7 у P найдётся гипергрань G , содержащая F и, значит, удовлетворяющая условию (1). Обратно, если для некоторой гиперграни G выполнено (1), то $X = \text{ext } F$ для некоторой её грани F , поскольку G — симплекс (см. теоремы 13.5 и 12.2); но в таком случае F служит также и гранью P .

Далее, по теореме 13.6 существование гиперграниц G , удовлетворяющей условию (1), равносильно существованию такого $(d-k)$ -элементного подмножества Z в $(\text{ext } P) \setminus X$, что все собственные компоненты множества $X \cup Z$ чётны. В свою очередь это равносильно тому, что число нечётных собственных компонент множества X не превышает $d-k$, что и требовалось доказать. $\square$

Для малых значений k теорема 13.7 принимает следующий вид:

СЛЕДСТВИЕ 13.8. Пусть $P = \text{conv} \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ — циклический многогранник типа $C(n, d)$ и k — натуральное число, удовлетворяющее условию

$$1 \leq k \leq \lfloor d/2 \rfloor.$$

Тогда любые k из точек $x(t_1), \dots, x(t_n)$ служат вершинами некоторой $(k-1)$ -границы P . Следовательно,

$$f_{k-1}(P) = \binom{n}{k}.$$

Доказательство. Как и в теореме 13.7, будем считать, что $t_1 < \dots < t_n$. Если $k \leq \lfloor d/2 \rfloor$, то $d-k \geq k$. Так как число (нечётных собственных) компонент множества X не может превышать числа всех его точек, наше утверждение немедленно вытекает из теоремы 13.7. $\square$

Следствие 13.8 — воистину поразительный результат. В частности, он показывает, что для любого $d \geq 4$ существуют d -многогранники P со сколь угодно большим числом вершин, любые две из которых смежны.

В заключение приведём ещё одно следствие из теоремы 13.7:

СЛЕДСТВИЕ 13.9. Пусть $P = \text{conv} \{x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ и $Q = \text{conv} \{x(s_1), \dots, x(s_n)\}$ — циклические многогранники одного и того же типа $C(n, d)$. Тогда P и Q эквивалентны.

Доказательство. Можно считать, что $t_1 < \dots < t_n$ и $s_1 < \dots < s_n$. Для каждой грани F многогранника P с вершинами $x(t_{i_1}), \dots, x(t_{i_k})$ положим

$$\varphi(F) := \operatorname{conv}\{x(\tau_{i_1}), \dots, x(\tau_{i_k})\}.$$

В силу теоремы 13.7, φ является изоморфизмом $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. $\square$

У п р а ж н е н и я

13.1. Используя теорему 13.6, докажите, что для любого циклического многогранника P типа $C(n, d)$ число его гиперграней задается формулой

$$\mu(n, d) = \begin{cases} \frac{n}{n-d/2} \binom{n-d/2}{n-d} & \text{при чётных } d, \\ 2 \binom{n-(d+1)/2}{n-d} & \text{при нечётных } d. \end{cases}$$

Проверьте, что в обоих случаях

$$\mu(n, d) = \binom{n - \lfloor (d+1)/2 \rfloor}{n-d} + \binom{n - \lfloor (d+2)/2 \rfloor}{n-d}.$$

(После того как читатель ознакомится с § 18, рекомендуем ему сравнить последнюю формулу с формулой из утверждения (а) теоремы 18.2.)

13.2. Докажите, что если P — циклический многогранник типа $C(n, d)$ с чётным d , то любая его вершинная фигура эквивалентна некоторому циклическому многограннику типа $C(n-1, d-1)$.

13.3. Проверьте, что если P — такой циклический многогранник типа $C(n, d)$, что любая его вершинная фигура эквивалентна некоторому циклическому многограннику типа $C(n-1, d-1)$, то

$$n \cdot \mu(n-1, d-1) = d \cdot \mu(n, d)$$

(см. упр. 13.1). Используя этот факт, покажите, что если

d нечётно и $n \geq d + 2$, то не всякая вершинная фигура P эквивалентна некоторому циклическому многограннику.

13.4. Дайте прямое доказательство следствия 13.8 в духе доказательства теоремы 13.4.

§14. СМЕЖНОСТНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В § 13 мы познакомились с примерами d -многогранников P , обладающих тем свойством, что для определенных значений k любое подмножество множества $\text{ext } P$, содержащее k элементов, служит множеством вершин некоторой грани P . Здесь мы займёмся выяснением общих свойств таких многогранников.

Пусть k — натуральное число. Будем говорить, что d -многогранник P , имеющий не менее $k + 1$ вершин, является k -смежностным, если любое k -элементное подмножество X в $\text{ext } P$ составляет множество вершин некоторой собственной грани P , т. е. $\text{conv } X$ представляет собой собственную грань P для всякого k -элементного подмножества X множества $\text{ext } P$. При $d \geq 1$ каждый d -многогранник 1-смежностен, а каждый d -симплекс k -смежностен для всех $k \leq d$.

Поясним условие, что число вершин P должно быть не меньше $k + 1$. Если P имеет k вершин, то у $\text{ext } P$ есть только одно k -элементное подмножество — само множество $\text{ext } P$; это последнее, однако, не есть множество вершин никакой собственной грани. Если же число вершин P меньше k , то у $\text{ext } P$ вообще нет никаких k -элементных подмножеств, и потому формально любое его k -элементное подмножество $\text{ext } P$ является множеством вершин собственной грани P . Итак, если мы откажемся от условия, что число вершин P должно быть не меньше $k + 1$, то P будет k -смежностным для всех $k > \text{card}(\text{ext } P)$.

При данном нами определении d -многогранник P может быть k -смежностным лишь для $k \leq d$. В самом деле, если $k \geq d + 1$, то (в предположении, что P имеет по меньшей мере k вершин) можно найти такое k -элементное подмножество X в $\text{ext } P$, что некоторое его $(d + 1)$ -элементное под-

множество образует аффинно-независимое семейство из $d+1$ элементов; тогда выпуклая оболочка X должна иметь размерность d , а потому X не может служить множеством вершин никакой собственной грани. В действительности, как мы это установим ниже (см. следствие 14.5), за исключением случая симплексов возможны лишь значения $k \leq \lfloor d/2 \rfloor$.

Из теоремы 13.5 и следствия 13.8 вытекает следующий результат:

ТЕОРЕМА 14.1. Каждый циклический многогранник P типа $C(n, d)$ является симплициальным k -смежностным многогранником для всех $k \leq \lfloor d/2 \rfloor$.

Приступим теперь к изучению k -смежностных многогранников общего вида.

ТЕОРЕМА 14.2. Пусть d -многогранник P k -смежностен и $1 \leq j \leq k$. Тогда P является также и j -смежностным.

Доказательство. Пусть X — произвольное j -элементное подмножество в $\text{ext } P$. Так как

$$\begin{aligned} \text{card} ((\text{ext } P) \setminus X) &\geq d+1-j \\ &\geq (k-j)+1, \end{aligned}$$

мы видим, что для любой вершины x многогранника P , не принадлежащей X , найдётся такое k -элементное подмножество $Y(x)$ множества $\text{ext } P$, что $X \subset Y(x)$ и $x \notin Y(x)$. Положим

$$F := \bigcap_{x \in (\text{ext } P) \setminus X} \text{conv } Y(x).$$

Каждое из множеств $\text{conv } Y(x)$ служит гранью P , поэтому F представляет собою грань P , содержащую X , но не содержащую ни одной из вершин P , не принадлежащих X . Значит,

$$\text{ext } F = X,$$

чем и доказано, что многогранник P является j -смежностным. $\square$

ТЕОРЕМА 14.3. Для всякого k -смежного d -многогранника P и всякого подмножества X в $\text{ext } P$, содержащего не менее $k+1$ точек, многогранник $Q := \text{conv } X$ — также k -смежный.

Доказательство. Пусть Y — произвольное k -элементное подмножество в $\text{ext } Q = X$. Ввиду k -смежности многогранника P множество $\text{conv } Y$ является (собственной) гранью P . Будучи собственным подмножеством Q , оно должно тогда быть и собственной гранью Q . $\square$

Следующая теорема имеет важные следствия.

ТЕОРЕМА 14.4. Пусть P — произвольный k -смежный d -многогранник. Тогда каждая его грань F с

$$0 \leq \dim F \leq 2k-1$$

представляет собой симплекс.

Доказательство. Положим $j := \dim F$. Допустим, что F — не симплекс. Тогда F имеет по меньшей мере $j+2$ вершин. Пусть M — какое-нибудь $(j+2)$ -элементное подмножество множества $\text{ext } F$. По теореме Радона (следствие 2.7) M можно разбить на такие два подмножества M_1 и M_2 , что

$$\text{conv } M_1 \cap \text{conv } M_2 \neq \emptyset. \quad (1)$$

Хотя бы одно из множеств M_1, M_2 содержит не больше k точек. В самом деле, если бы каждое из них содержало больше k точек, то мы имели бы

$$j+2 = \text{card } M_1 + \text{card } M_2 \geq (k+1) + (k+1)$$

$$= 2k+2 \geq \dim F + 3 = j+3,$$

что невозможно. Пусть, скажем, $\text{card } M_1 \leq k$. Тогда ввиду теоремы 14.2 и k -смежности P множество $\text{conv } M_1$ представляет собой собственную грань P . Пусть H — опорная гиперплоскость к P , такая что

$$H \cap P = \text{conv } M_1,$$

и пусть

$$y \in \operatorname{conv} M_1 \cap \operatorname{conv} M_2$$

(см. (1)). Тогда, очевидно, y принадлежит H , а потому по меньшей мере одна из вершин грани $\operatorname{conv} M_2$ должна принадлежать H . Такая вершина обязана служить также и вершиной грани $\operatorname{conv} M_1$, что противоречит тому факту, что M_1 и M_2 не пересекаются. Тем самым доказательство завершено. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 14.5. Пусть P представляет собой k -смежностный d -многогранник, причём $\lfloor d/2 \rfloor < k$. Тогда P является симплексом.

Доказательство. Поскольку из условия $\lfloor d/2 \rfloor < k$ вытекает, что $d \leq 2k - 1$, применима теорема 14.4 с $F = P$. $\square$

Отметим, что, как вытекает из этого следствия, никаких других 2-смежностных или 3-смежностных 3-многогранников, кроме 3-симплексов, нет. Поэтому понятие k -смежностного d -многогранника представляет реальный интерес лишь при $d \geq 4$.

СЛЕДСТВИЕ 14.6. Пусть P есть $(d/2)$ -смежностный d -многогранник, где d чётно. Тогда P — симплициальный многогранник.

Доказательство. Пусть F — произвольная гипергрань P . Тогда $\dim F = d - 1 = 2k - 1$, где $k = d/2$. Поэтому, в силу теоремы 14.4, F является симплексом, а значит (теорема 12.9), многогранник P симплициален. $\square$

ТЕОРЕМА 14.7. Простой d -многогранник P тогда и только тогда двойствен к некоторому k -смежностному многограннику, когда любые k гиперграней P имеют непустое пересечение.

Доказательство. Пусть Q — многогранник, двойственный к P . Тогда, в силу теорем 12.10 и 10.3, Q есть симплициальный d -многогранник. По двойственности любые k вершин Q тогда и только тогда принадлежат некоторой его собственной грани, когда любые k гиперграней P имеют непустое пересечение. Но Q — симплициальный многогранник, и поэтому любые k его вершин, принадлежащих собственной грани Q , на самом деле составляют

множество вершин некоторой собственной грани. Отсюда следует наше утверждение. $\square$

Теорема 14.1 и следствие 14.5 показывают, что если исключить симплексы, то нет "более смежных" многогранников, чем циклические. В дальнейшем $\lfloor \alpha/2 \rfloor$ -смежные α -многогранники будем называть просто смежными, многогранники, двойственные к ним, — дуально-смежными.

Существуют смежные многогранники и не эквивалентные циклическим. Это очевидно для случая $\alpha = 3$, так как каждый 3-многогранник смежен. Известны, однако, примеры и в больших размерностях.

Заметим, наконец, что для нечётных $\alpha \geq 3$ существуют и не симплициальные смежные многогранники (см. следствие 14.6). В самом деле, рассмотрим α -пирамиду P в $\mathbb{R}^\alpha$, основанием которой служит смежный $(\alpha-1)$ -многогранник Q , не являющийся симплексом. По теореме 7.7 она смежна. С другой стороны, Q — не симплекс, а потому P — не симплициальный многогранник.

У п р а ж н е н и я

- 14.1. Пусть P — некоторый k -смежный α -многогранник. Докажите, что любая вершинная фигура P — $(k-1)$ -смежный многогранник.
- 14.2. Докажите, что всякий смежный α -многогранник является $(\alpha-2)$ -симплициальным, см. упр. 12.5.

§ 15. ГРАФ МНОГОГРАННИКА

Вершины и рёбра данного многогранника P очевидным образом образуют неориентированный граф, который мы будем обозначать через $\mathcal{G}(P)$. (По поводу используемых ниже понятий теории графов см. добавление 2.) В настоящем параграфе мы исследуем свойства связности графа $\mathcal{G}(P)$. Доказательства основаны на методе превращения $\mathcal{G}(P)$ в некоторый ориентированный граф $\mathcal{G}(P, w)$ при помощи "допустимого" вектора w . Этот метод ориентированного графа будет использоваться и в дальнейшем.

Ниже P обозначает d -многогранник в пространстве $\mathbb{R}^d$ где $d \geq 1$. Будем говорить, что вектор $w \in \mathbb{R}^d$ является допустимым для P , если $\langle x, w \rangle \neq \langle y, w \rangle$ для двух любых различных вершин x и y этого многогранника. Геометрически это означает, что ни одна гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$ с нормалью w не содержит более одной вершины P .

Относительно существования допустимых векторов можно утверждать следующее:

ТЕОРЕМА 15.1. Для любого d -многогранника P в $\mathbb{R}^d$ множество допустимых векторов всюду плотно в $\mathbb{R}^d$, т. е. каковы бы ни были $y \in \mathbb{R}^d$ и $\varepsilon > 0$, найдётся допустимый вектор w , такой что $\|y - w\| < \varepsilon$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что ни для какого конечного семейства гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$ их объединение не имеет внутренних точек. Это проверяется последовательным применением того наблюдения, что для любого непустого открытого множества O в $\mathbb{R}^d$ и любой гиперплоскости H в $\mathbb{R}^d$ разность $O \setminus H$ остаётся непустой и открытой.

Пусть теперь

$$\text{ext } P = \{x_1, \dots, x_k\},$$

и пусть

$$V := \{x_j - x_i \mid i, j = 1, \dots, k; i \neq j\}.$$

Из сделанного выше замечания следует, что открытый шар

$$\{z \in \mathbb{R}^d \mid \|y - z\| < \varepsilon\}$$

не содержится в объединении гиперплоскостей $H(v, 0)$, $v \in V$. Иначе говоря, существует такой вектор $w \in \mathbb{R}^d$, что $\|y - w\| < \varepsilon$ и $\langle x_j - x_i, w \rangle \neq 0$ для $i \neq j$. Теорема доказана. $\square$

Каждый вектор w , допустимый для многогранника P , порождает некоторую ориентацию его рёбер в соответствии со следующим правилом: данное ребро $[x, y]$ направлено от y к x , если

$$\langle x, w \rangle > \langle y, w \rangle.$$

Так определённый ориентированный граф будет обозначаться $\mathcal{G}(P, w)$.

Пусть вектор w допустим для P . Если считать этот вектор направленным "вниз", то мы видим, что и рёбра графа $\mathcal{G}(P, w)$ направлены "книзу". В дальнейшем нам будет удобно придерживаться такого словоупотребления; это позволит нам заявлять, что одна вершина находится "над" или "под" другой и т.п. Можно будет также говорить о "вышей" и "низшей" вершинах многогранника.

Пусть задан какой-нибудь допустимый для P вектор w . Ясно, что высшая вершина P имеет в графе $\mathcal{G}(P, w)$ нулевую валентность входа, а низшая вершина — нулевую валентность выхода. На самом деле справедливо более сильное следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 15.2. В графе $\mathcal{G}(P, w)$ высшая вершина есть единственная вершина с валентностью входа, равной 0, а низшая вершина — единственная вершина с валентностью выхода, равной 0.

Доказательство. Пусть x — некоторая вершина P с нулевой валентностью входа. Тогда все смежные с x вершины P находятся ниже x . Отсюда вытекает, что существует такая гиперплоскость H с нормалью w , что x расположена над этой гиперплоскостью, а все смежные с x вершины — под нею. На основании теоремы 11.8 мы заключаем, что все вершины P , кроме x , лежат под H , чем и доказано, что x является высшей вершиной.

Что касается утверждения относительно низшей вершины, то его можно доказать аналогичным образом, а можно просто заметить, что если вектор w допустим, то допустим также и вектор $-w$ и валентность входа данной вершины в $\mathcal{G}(P, w)$ равна валентности выхода той же вершины в $\mathcal{G}(P, -w)$. $\square$

ТЕОРЕМА 15.3. Пусть P — произвольный d -многогранник в $\mathbb{R}^d$ и F — его собственная грань. Существует такой допустимый для P вектор w , что любая вершина грани F расположена выше любой из вершин P , не принадлежащих F .

Доказательство. Пусть $H(y, \alpha)$ — опорная гиперплоскость к P , такая что $H(y, \alpha) \cap P = F$ (см. теорему 7.5). Можно считать, что $\langle x, y \rangle \geq \alpha$ для всех $x \in P$. Положим

$$\rho := \min \{ \langle x', y \rangle \mid x' \in \text{ext } P \setminus \text{ext } F \},$$

$$\delta := \max \{ \|x' - x''\| \mid x' \in \text{ext } P \setminus \text{ext } F, x'' \in \text{ext } F \}.$$

Заметим, что $\rho > \alpha$, и положим, далее,

$$\varepsilon := (\rho - \alpha) / 2 \delta.$$

Пусть w — такой допустимый вектор, что $\|y - w\| < \varepsilon$ (см. теорему 15.1). Тогда, полагая $z := y - w$, имеем для всех $x' \in \text{ext } P \setminus \text{ext } F$ и всех $x'' \in \text{ext } F$

$$\begin{aligned} \langle x' - x'', w \rangle &= \langle x' - x'', y - z \rangle \\ &= \langle x', y \rangle - \langle x'', y \rangle - \langle x' - x'', z \rangle \\ &\geq \rho - \alpha - \|x' - x''\| \|z\| \\ &> \rho - \alpha - \delta \varepsilon = (\rho - \alpha) / 2 > 0, \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает наше утверждение. $\square$

ТЕОРЕМА 15.4. Пусть P — произвольный d -многогранник в $\mathbb{R}^d$, F — его собственная грань и M — подмножество в $\text{ext } F$. Существует такой допустимый для P вектор w , что для каждой вершины x многогранника P , не принадлежащей M , в $\mathcal{G}(P)$ найдётся путь, который, минуя M , соединяет x с низшей вершиной v графа $\mathcal{G}(P, w)$.

Доказательство. В силу теоремы 15.3 существует такой допустимый вектор w , что любая из вершин грани F выше любой вершины, не принадлежащей F . Пусть x — произвольная вершина, не принадлежащая M . Если x совпадает с низшей вершиной v , то доказывать нечего. Если же $x \neq v$, то по теореме 15.2 существует по крайней мере одно ребро, идущее от x вниз. Обозначим это ребро $[x, x_1]$. Если $x_1 = v$, то мы уже имеем путь из x в v . Если $x_1 \neq v$, то с помощью теоремы 15.2 сделаем ещё один шаг вниз. Продолжая таким образом, получим некоторый "спускающийся вниз" путь, соединяющий x и v . Остаётся доказать, что мы можем при этом миновать M . Заметим, что если уж мы с какого-то момента оказались вне F , то обязательно находимся ниже F и потому начиная с этого момента заведомо не попадём больше в M . Итак, если можно выбрать пер-

вое ребро на нашем пути так, чтобы оно не было ребром F' , то дело сделано. Для x , не принадлежащих F' , возможность такого выбора очевидна. Если же x принадлежит F' , то, применяя следствие 11.7, мы убеждаемся, что по меньшей мере одно из рёбер P с концевой точкой x не принадлежит F' . Тем самым доказательство завершено. $\square$

ТЕОРЕМА 15.5. Пусть P — произвольный d -многогранник, F' — его собственная грань и M — некоторое (возможно пустое) подмножество в $\text{ext } P$. Тогда подграф графа $\mathcal{G}(P)$, порождённый $(\text{ext } P) \setminus M$, является связным. В частности, связан и сам граф $\mathcal{G}(P)$.

Доказательство. Обозначим подграф графа $\mathcal{G}(P)$, порождённый $(\text{ext } P) \setminus M$, через Γ . Применение теоремы 15.4 показывает, что у графа Γ имеется такая вершина v , что любую другую его можно соединить с v путём, проходящим по Γ . Отсюда следует, что любые две вершины Γ могут быть связаны между собой некоторым путём в Γ (проходящим через v). Тем самым доказано, что Γ является связным. Полагая $M = \emptyset$ видим, что и сам граф $\mathcal{G}(P)$ связан. $\square$

Теорема 15.5 утверждает, что граф $\mathcal{G}(P)$ связан. Фактически справедлив существенно более сильный результат:

ТЕОРЕМА 15.6. Для всякого d -многогранника P граф $\mathcal{G}(P)$ является d -связным.

Доказательство. Достаточно установить, что для любого множества N , состоящего из $d-1$ вершин многогранника P , связан подграф Γ , порождённый $(\text{ext } P) \setminus N$ (см. теорему 12.1 из добавления 2). Если у P есть такая собственная грань F' , что $N \subset \text{ext } F'$, то связность Γ вытекает из теоремы 15.5. Если такой грани нет, то (в предположении, что $P \subset \mathbb{R}^d$) любая гиперплоскость, которая содержит N , должна пересекаться с $\text{int } P$. Выберем какую-нибудь гиперплоскость H , содержащую, кроме N , по крайней мере ещё одну вершину x_0 многогранника P . Обозначим через K_1 и K_2 замкнутые полупространства, ограниченные H , и положим $P_1 := K_1 \cap P$, $P_2 := K_2 \cap P$. В силу теоремы 9.2, P_1 и P_2 представляют собой

d -многогранники, причём множество $F := H \cap P$ служит гипергранью их обоих. Вершины F — это, во-первых, вершины P , принадлежащие H , и, во-вторых, одноточечные пересечения гиперплоскости H с рёбрами P , пересекающими H (см. утверждения (b) и (d) теоремы 11.1). Положим

$$M := N \cup (\text{ext } F \setminus \text{ext } P)$$

и обозначим через Γ_1 подграф графа $\mathcal{G}(P_1)$, порожденный $(\text{ext } P_1) \setminus M$, а через Γ_2 — подграф графа $\mathcal{G}(P_2)$, порожденный $(\text{ext } P_2) \setminus M$. Согласно теореме 15.5, Γ_1 и Γ_2 связны. Пусть теперь x — произвольная вершина P , не принадлежащая N . Тогда x служит вершиной Γ_1 или Γ_2 (или их обоих). Допустим, например, что x — вершина Γ_1 . В силу связности графа Γ_1 в нём есть путь, соединяющий между собой x и x_0 . Он представляет собой путь в $\mathcal{G}(P)$, не заходящий в N . Следовательно, любые две вершины P , не принадлежащие N , можно через x_0 соединить путём в $\mathcal{G}(P)$, который минует N , чем и доказано, что подграф графа $\mathcal{G}(P)$, порождённый $(\text{ext } P) \setminus N$, является связным. $\square$

Под системой гиперграней многогранника P мы понимаем всякое непустое множество $\mathcal{U}$ его гиперграней. Каждый граф $\mathcal{G}(F)$, $F \in \mathcal{U}$ представляет собой некоторый подграф графа $\mathcal{G}(P)$. Объединение этих подграфов $\mathcal{G}(F)$, $F \in \mathcal{U}$, обозначается $\mathcal{G}(\mathcal{U})$. Будем говорить, что система гиперграней $\mathcal{U}$ связна, если $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ — связный граф.

ТЕОРЕМА 15.7. Пусть $\mathcal{U}$ — связная система гиперграней простого d -многогранника P , где $d \geq 2$. Тогда $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ является $(d-1)$ -связным графом.

Доказательство. Проведём индукцию по числу n элементов $\mathcal{U}$. Для $n=1$ утверждение немедленно вытекает из теоремы 15.6. Для $n \geq 2$ можно таким образом занумеровать элементы $F_1, \dots, F_n$, входящие в систему $\mathcal{U}$, что будет связной её подсистемы $\mathcal{U}'$, состоящая из $F_1, \dots, F_{n-1}$. (Возьмём F_1 произвольно; используя связность $\mathcal{U}$, найдём такую гипергрань F_2 , что система $\{F_1, F_2\}$ связна; снова используя связность $\mathcal{U}$, найдём такую гипергрань F_3 , что будет связна система

$\{F_1, F_2, F_3\}$, и т. д.) По предположению индукции граф $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ является $(\alpha-1)$ -связным. Далее, в силу связности $\mathcal{F}$ существует такая гипергрань F_j с $j \leq n-1$, что $F_j \cap F_n \neq \emptyset$. Из теоремы 12.14 следует, что $F_j \cap F_n$ представляет собой $(\alpha-2)$ -грань P . Поэтому F_j и F_n имеют не меньше $\alpha-1$ общих вершин, а значит, и графы $\mathcal{G}(\mathcal{F}')$ и $\mathcal{G}(F_n)$ имеют не меньше $\alpha-1$ общих вершин. Поскольку оба эти графа $(\alpha-1)$ -связны, то и их объединение, т. е. $\mathcal{G}(\mathcal{F})$, есть $(\alpha-1)$ -связный граф (см. теорему 12.2). $\square$

У п р а ж н е н и я

15.1. Полуразвёрткой α -многогранника P называется такая нумерация $F_1, F_2, \dots, F_k$ его гиперграней, что при $i = 2, \dots, k$ множество

$$F_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} F_j \quad (1)$$

является непустым объединением $(\alpha-2)$ -граней гиперграней F_j . Используя соображения двойственности, докажите, что любой α -многогранник допускает полуразвёртки.

Проверьте, что в качестве F_i можно взять любую гипергрань. Докажите, что гипергрань, содержащая некоторую заданную грань, всегда можно поставить впереди всех остальных гиперграней.

(Полуразвёртка называется развёрткой, если к тому же при $i = 2, \dots, k-1$ множество (1) гомеоморфно $(\alpha-2)$ -шару. В случае когда P — симплициальный многогранник, это условие выполнено автоматически.)

15.2. Граф называют плоским, если, грубо говоря, его можно изобразить на плоскости без самопересечений (с не обязательно прямолинейными рёбрами). Докажите, что граф $\mathcal{G}(P)$ любого 3-многогранника P является плоским. (В сочетании с теоремой 15.6 это даёт лёгкую часть теоремы Штейница: данный граф Γ представляется собой (с точностью до изоморфизма) граф $\mathcal{G}(P)$ некоторого 3-многогранника P тогда и только тогда, когда он плоский и 3-связный.)

ГЛАВА 3

Комбинаторная теория выпуклых многогранников

§ 16. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Как мы отмечали в начале § 10, можно считать, что комбинаторная теория выпуклых многогранников занимается изучением решёток граней таких многогранников. Однако на деле всё выглядит скромнее, и, наверное, точнее будет сказать, что упомянутая теория занимается изучением f -векторов. Напомним, что f -вектор данного d -многогранника P , $d \geq 1$, определяется как набор из d целых чисел

$$f(P) = (f_0(P), f_1(P), \dots, f_{d-1}(P)),$$

где $f_j(P)$ обозначает число j -граней многогранника P (см. § 10). Эквивалентные многогранники имеют одинаковые f -векторы, но обратное, вообще говоря, неверно.

Основная проблема комбинаторной теории выпуклых многогранников может быть сформулирована так: какие наборы из d натуральных чисел служат f -векторами d -многогранников? Если

обозначить через $\mathcal{P}^d$ множество всех d -многогранников, а через $f(\mathcal{P}^d)$ — множество всех f -векторов d -многогранников, то указанная проблема состоит в нахождении подмножества $f(\mathcal{P}^d)$ в $\mathbb{R}^d$. Полностью эта проблема решена лишь для $d \leq 3$, причём случаи $d = 1, 2$ тривиальны.

В настоящем параграфе будет найдена аффинная оболочка $\text{aff } f(\mathcal{P}^d)$ множества $f(\mathcal{P}^d)$. Это частичное решение основной проблемы — один из главных результатов общего характера в данной области.

Сначала мы установим, что числа $f_j(P), j = 0, 1, \dots, d-1$, связаны некоторым линейным соотношением, справедливым для всех d -многогранников P . По техническим соображениям удобно добавить ещё числа $f_{-1}(P) = 1$ и $f_d(P) = 1$. Указанное линейное соотношение известно как формула Эйлера:

ТЕОРЕМА 16.1. Для любого d -многогранника P

$$\sum_{j=-1}^d (-1)^j f_j(P) = 0.$$

Отметим, что формулу Эйлера можно переписать так:

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j f_j(P) = 1,$$

или

$$\sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j f_j(P) = 1 - (-1)^d = 1 + (-1)^{d-1}.$$

Поскольку $f_j(P) = 0$ при $j > d = \dim P$, её можно записать и в следующей форме:

$$\sum_{j=-1}^{\infty} (-1)^j f_j(P) = 0,$$

уже не зависящей от размерности P .

Доказательство. Проведём индукцию по d . Для $d = 0, 1$ доказывать нечего, а для $d = 2$ утверждение очевидно. Итак, допустим, что $d \geq 3$ и наше утверждение справедливо для всех многогранников размерности $\leq d-1$. Рассмотрим произвольный d -многогранник P . Считая, что $P \subset \mathbb{R}^d$, и применяя теорему 15.1, выберем какой-нибудь допустимый вектор w для P . Пусть $x_1, \dots, x_n$ — вершины P , занумерованные таким образом, что

$$\langle x_i, w \rangle < \langle x_{i+1}, w \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Если, как и в § 15, считать w направленным вниз, то эти неравенства означают, что вершина x_{i+1} лежит ниже x_i . Положим

$$\alpha_{2i-1} := \langle x_i, w \rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Замечая, что $\alpha_{2i-1} < \alpha_{2i+1}$, выберем теперь числа α_{2i} так, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha_{2i-1} < \alpha_{2i} < \alpha_{2i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

и положим

$$H_k := H(w, \alpha_k), \quad k = 1, \dots, 2n-1.$$

Ясно, что H_k образуют набор параллельных гиперплоскостей, причём H_{k+1} лежит ниже H_k и гиперплоскости H_k с нечётными номерами k проходят через вершины многогранника P . Пусть

$$P_k := H_k \cap P, \quad k = 1, \dots, 2n-1.$$

Это $(d-1)$ -многогранник при $k = 2, \dots, 2n-2$, а при $k = 1, 2n-1$ мы имеем $P_1 = \{x_1\}$, $P_{2n-1} = \{x_n\}$. По предположению индукции формула Эйлера справедлива для многогранников P_k . т. е.

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(P_k) = 0, \quad k = 1, \dots, 2n-1.$$

Умножая на $(-1)^{k+1}$ и складывая, получим

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} \sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(P_k) = 0,$$

что можно переписать в виде

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^{j+1} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f_j(P_k) = 0. \quad (1)$$

Докажем, что

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f_j(P_k) = \begin{cases} -1 & \text{при } j = -1, \\ f_1(P) - f_0(P) & \text{при } j = 0, \\ f_{j+1}(P) & \text{при } j = 1, \dots, d-1. \end{cases} \quad (2)$$

Требуемое соотношение сразу следует из (1) и (2).

Чтобы доказать (2) для $j = -1$, заметим, что $f_{-1}(P_k) = 1$ для всех k и, следовательно, левая часть представляет собой знакопеременную сумму вида $-1 + 1 - \dots + 1 - 1$, которая, очевидно, равна -1 .

Переходя к оставшимся двум случаям, положим для $F \in \mathcal{F}(P)$ и $k = 1, \dots, 2n-1$

$$\psi(F, k) := \begin{cases} 1, & \text{если } H_k \cap \text{ri } F \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } H_k \cap \text{ri } F = \emptyset. \end{cases}$$

Далее, обозначим через $\mathcal{F}_j(P)$ множество всех j -граней P .

Сначала рассмотрим случай $1 \leq j \leq d-1$. Тогда у каждой из j -граней P по крайней мере две вершины, а поскольку каждая из гиперплоскостей H_k содержит не более одной вершины P , то, следовательно, ни одна из j -граней многогранника P_k не служит гранью многогранника P . Поэтому, в силу утверждения (d) теоремы 11.1, для каждой j -грани F' многогранника P_k найдётся единственная грань F многогранника P , такая, что $F' = H_k \cap F$, и эта грань F является $(j+1)$ -гранью. При этом $H_k \cap \text{ri } F \neq \emptyset$ (иначе F' было бы гранью P). Обратно, если F' есть $(j+1)$ -грань P , та-

кая что $H_k \cap F \neq \emptyset$, то $F' := H_k \cap F$ представляет собой, в силу утверждения (b) теоремы 11.1, j -грань P_k . Таким образом, при фиксированных j и k отображение

$$F \mapsto F' := H_k \cap F$$

есть взаимно-однозначное отображение множества $(j+1)$ -граней F многогранника P , для которых $\psi(F, k) = 1$, на множество j -граней многогранника P_k . Значит,

$$f_j(P_k) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{j+1}(P)} \psi(F, k). \quad (3)$$

Используя (3), мы можем следующим образом преобразовать левую часть соотношения (2):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f_j(P_k) &= \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathcal{F}_{j+1}(P)} \psi(F, k) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_{j+1}(P)} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \psi(F, k). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим теперь произвольную фиксированную $(j+1)$ -грань F многогранника P . Обозначим через x_{i_1} и x_{i_2} соответственно её высшую и низшую вершины. Тогда значения k , для которых $\psi(F, k) = 1$, суть $k = 2i_1, 2i_1 + 1, \dots, 2i_2 - 3, 2i_2 - 2$. В этом наборе чётных чисел на единицу больше, чем нечётных, а потому

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \psi(F, k) = 1. \quad (5)$$

Объединяя (4) и (5), получаем

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f_j(P_k) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{j+1}(P)} 1 = f_{j+1}(P),$$

чем и доказано (2) для $1 \leq j \leq d-1$.

Случай $j=0$ немного труднее. Если k чётно, то H_k не содержит вершин P . Поэтому для чётных k ни одна из 0-граней P_k не является гранью P . Рассуждая, как и выше, приходим

к заключению, что

$$f_0(P_k) = \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \psi(F, k) \text{ при чётных } k. \quad (6)$$

Для нечётных k ситуация чуть иная. В этом случае гиперплоскость H_k содержит одну вершину P , которая служит вершиной и для P_k . Что касается всех прочих вершин P_k , то можно рассуждать, как и выше, и это дает

$$f_0(P_k) = \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \psi(F, k) + 1 \text{ при нечётных } k. \quad (7)$$

Используя (6) и (7), левую часть (2) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f_0(P_k) &= \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \psi(F, k) + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{по нечётным}}}^{2n-1} (-1)^k \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \psi(F, k) - f_0(P); \end{aligned} \quad (8)$$

мы воспользовались тем фактом, что число нечётных значений k равно $f_0(P)$. Далее рассуждаем так же, как и в случае $1 \leq j \leq d-1$, и получаем

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \psi(F, k) = 1 \quad (9)$$

для любой грани $F \in \mathcal{F}_1(P)$. Из (8) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k f_0(P_k) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} 1 - f_0(P) \\ &= f_1(P) - f_0(P), \end{aligned}$$

т. е. (2) установлено и для $j=0$; тем самым доказательство завершено. $\square$

Положим для $d \geq 1$

$$\varepsilon := (1, -1, \dots, (-1)^{d-1}) \in \mathbb{R}^d.$$

Гиперплоскость $H(\varepsilon, 1 - (-1)^d)$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ будем называть эйлеровой гиперплоскостью. Отметим, что $\sigma \in H(\varepsilon, 1 - (-1)^d)$, если и только если d чётно. Теорема 16.1 показывает, что множество $f(\mathcal{P})^d$ располагается на эйлеровой гиперплоскости. Докажем теперь следующий результат:

ТЕОРЕМА 16.2. Эйлерова гиперплоскость $H(\varepsilon, 1 - (-1)^d)$ — это единственная гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^d$, которая содержит множество $f(\mathcal{P}^d)$.

Доказательство. Проведём индукцию по d . Для $d = 1, 2$ утверждение очевидно. Итак, допустим, что $d \geq 3$ и наша теорема верна для всех размерностей $\leq d-1$. Пусть $H = H(y, \alpha)$ — такая гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, что $f(\mathcal{P}^d) \subset H(y, \alpha)$. Мы докажем, что тогда найдётся вещественное число $c \neq 0$, такое что $y = c\varepsilon$ и $\alpha = c(1 - (-1)^d)$, и тем самым установим, что $H(y, \alpha) = H(\varepsilon, 1 - (-1)^d)$.

Пусть Q — произвольный $(d-1)$ -многогранник, и Q' — некоторый его эквивалент в пространстве $\mathbb{R}^d$. Обозначим через P_1 какую-нибудь d -пирамиду в $\mathbb{R}^d$ с основанием Q' , а через P_2 — какую-нибудь d -бипирамиду с основанием Q' . Мы можем выразить $f(P_1)$ и $f(P_2)$ через $f(Q') = f(Q)$. В самом деле, из теоремы 7.7 следует, что

$$f(P_1) = (f_0(Q) + 1, f_1(Q) + f_0(Q), \dots, f_{d-2}(Q) + f_{d-3}(Q), 1 + f_{d-2}(Q)),$$

а из теоремы 7.8 — что

$$f(P_2) = (f_0(Q) + 2, f_1(Q) + 2f_0(Q), \dots, f_{d-2}(Q) + 2f_{d-3}(Q), 2f_{d-2}(Q)).$$

Записывая y в виде

$$y = (\alpha_1, \dots, \alpha_d),$$

имеем

$$\alpha_1(f_0(Q)+1)+\alpha_2(f_1(Q)+f_0(Q))+\dots$$

$$\dots +\alpha_{d-1}(f_{d-2}(Q)+f_{d-3}(Q))+\alpha_d(1+f_{d-2}(Q))=\alpha \quad (10)$$

(поскольку $f(P_1) \in H(y, \alpha)$) и

$$\alpha_1(f_0(Q)+2)+\alpha_2(f_1(Q)+2f_0(Q))+\dots \quad (11)$$

$$\dots +\alpha_{d-1}(f_{d-2}(Q)+2f_{d-3}(Q))+\alpha_d 2f_{d-2}(Q)=\alpha$$

(поскольку $f(P_2) \in H(y, \alpha)$). Вычитая (10) из (11), получаем

$$\alpha_1 + \alpha_2 f_0(Q) + \dots$$

$$\dots + \alpha_{d-1} f_{d-3}(Q) + \alpha_d (f_{d-2}(Q) - 1) = 0. \quad (12)$$

Перепишем (12) в виде

$$\alpha_2 f_0(Q) + \alpha_3 f_1(Q) + \dots$$

(13)

$$\dots + \alpha_{d-1} f_{d-3}(Q) + \alpha_d f_{d-2}(Q) = \alpha_d - \alpha_1.$$

Из (13) видно, что

(14)

$$f(Q) \in H(\bar{x}, \alpha_d - \alpha_1),$$

где

$$\bar{x} := (\alpha_2, \dots, \alpha_d).$$

Так как, по предположению, $y \neq 0$, то $\alpha_j \neq 0$ по крайней мере для одного из индексов $j=1, \dots, d$. Но в таком случае¹ $\alpha_j \neq 0$ и для хотя бы одного из $j=2, \dots, d$, откуда следует, что $H(\bar{x}, \alpha_d - \alpha_1)$ представляет собой гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d-1}$, содержащую множество $f(\mathcal{P}^{d-1})$ (см. (14)). По предположению индукции отсюда вытекает, что

$$(\alpha_2, \dots, \alpha_d) = \gamma(1, -1, \dots, (-1)^{d-2})$$

и

$$\alpha_d - \alpha_1 = \gamma(1 - (-1)^{d-1})$$

для подходящего $\gamma \neq 0$. Полагая $c := -\gamma$, видим, что $y = c\varepsilon$ и $\alpha = c(1 - (-1)^d)$, как и утверждалось. $\square$

¹ В силу (12). — Прим. ред.

В качестве непосредственного следствия теорем 16.1 и 16.2 получаем следующий основной результат:

СЛЕДСТВИЕ 16.3. Аффинная оболочка $\text{aff } f(\mathcal{P}^d)$ множества $f(\mathcal{P}^d)$ совпадает с эйлеровой гиперплоскостью $H(\varepsilon, 1 - (-1)^d)$.

В заключение этого параграфа приведём один вариант формулы Эйлера. Для всяких двух граней F_1 и F_2 заданного d -многогранника P , удовлетворяющих условию $F_1 \subset F_2$, обозначим через $f_j(F_2/F_1)$ число j -граней F этого многогранника, для которых выполнены включения $F_1 \subset F \subset F_2$. Заметим, что $f_j(F_2/F_1) = 0$, если $-1 \leq j < \dim F_1$ или $\dim F_2 < j$. Мы установим, что в случае $F_1 \subsetneq F_2$ числа $f_j(F_2/F_1)$ связаны тем же линейным соотношением, что и числа $f_j(P)$:

ТЕОРЕМА 16.4. Пусть F_1 и F_2 — грани многогранника P , удовлетворяющие условию $F_1 \subsetneq F_2$. Тогда

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(F_2/F_1) = 0.$$

Доказательство. Из теоремы 11.4 вытекает, что найдётся такой многогранник Q с

$$\dim Q = \dim F_2 - 1 - \dim F_1,$$

что решётка $(\mathcal{F}(F_2/F_1), \subset)$ изоморфна решётке граней $(\mathcal{F}(Q), \subset)$, причём

$$\dim G = \dim F - 1 - \dim F_1,$$

если $F_1 \subset F \subset F_2$ и G — грань Q , которая соответствует F . В частности,

$$f_j(F_2/F_1) = f_k(Q), \tag{15}$$

если

$$k = j - 1 - \dim F_1.$$

Формула Эйлера для Q имеет вид

$$\sum_{k=-1}^d (-1)^k f_k(Q) = 0.$$

Используя (15), получаем равенство

$$\sum_{j=-1}^d (-1)^{j-1-\dim F_1} f_j(F_2/F_1) = 0,$$

очевидным образом равносильное доказываемому равенству. $\square$

Если в теореме 16.4 положить $F_1 = \emptyset$ и $F_2 = P$, то мы, конечно, вернёмся к формуле Эйлера.

§ 17. УРАВНЕНИЯ ДЕНА – СОММЕРВИЛЛЯ

В предыдущем параграфе мы установили, что размерность аффинной оболочки множества $f(P^d)$ равна $d-1$. Обозначим теперь через $\mathcal{P}_\sigma^d$ множество всех простых d -многогранников, а через $f(\mathcal{P}_\sigma^d)$ – множество всех соответствующих f -векторов. Мы докажем, что размерность $\text{aff } f(\mathcal{P}_\sigma^d)$ равна лишь $\lfloor d/2 \rfloor$. Кроме того, будут получены некоторые "представления" $\text{aff } f(\mathcal{P}_\sigma^d)$.

(Для множества простых d -многогранников пока нет общепринятого обозначения. Применяемое нами обозначение $\mathcal{P}_\sigma^d$ выбрано по аналогии со стандартным обозначением $\mathcal{P}_s^d$ для множества симплицальных d -многогранников.)

Прежде всего укажем некоторое множество линейных соотношений, которые выполняются для f -векторов всех простых d -многогранников. Эти соотношения называются уравнениями Дена – Соммервилля:

ТЕОРЕМА 17.1. Для любого простого d -многогранника P

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j \binom{d-j}{d-i} f_j(P) = f_i(P)$$

при $i=0, \dots, d$.

Заметим, что фактически суммирование ведётся лишь от $j=0$ до $j=i$. При $i=d$ мы получаем формулу Эйлера, а при

$i = 0$ – тривиальное равенство $f_0(P) = f_0(P)$.

Если $\alpha \leq 2$, то всё тривиально. В случае $\alpha = 3$ уравнения Дена – Коммервилля принимают вид

$$\begin{aligned} f_0(P) &= f_0(P), \\ 3f_0(P) - f_1(P) &= f_1(P), \\ 3f_0(P) - 2f_1(P) + f_2(P) &= f_2(P), \\ f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - 1 &= 1. \end{aligned}$$

Эти четыре соотношения эквивалентны следующим двум:

$$\begin{aligned} 3f_0(P) - 2f_1(P) &= 0, \\ f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) &= 2. \end{aligned}$$

Любопытно заметить, что если одно из трёх чисел $f_0(P)$, $f_1(P)$, $f_2(P)$ задано, то остальные два определяются из уравнений Дена – Коммервилля. В частности, $f_0(P)$ и $f_1(P)$ можно выразить через $f_2(P)$:

$$f_0(P) = 2f_2(P) - 4, \quad f_1(P) = 3f_2(P) - 6.$$

(Относительно α -мерного аналога отмеченного факта см. ниже теорему 17.6 и следствие 17.7.)

Доказательство. Согласно формуле Эйлера, для каждой непустой грани F многогранника P

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(F) = 0. \quad (1)$$

Используя, как и в доказательстве формулы Эйлера, обозначение $\mathcal{F}_i(P)$ для множества i -граней многогранника P , из (1) немедленно получаем, что при $i = 0, \dots, \alpha$

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} \sum_{j \geq -1} (-1)^j f_j(F) = 0, \quad (2)$$

или

$$\sum_{j \geq -1} (-1)^j \sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} f_j(F) = 0.$$

Значение суммы

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} f_j(F)$$

равно числу пар (G, F) граней P , таких что $\dim G = j$, $\dim F = i$ и $G \subset F$. Поэтому

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i(P)} f_j(F) = \sum_{G \in \mathcal{F}_j(P)} f_i(P/G). \quad (3)$$

Для случая $\dim G = j \geq 0$ число $f_i(P/G)$ было фактически определено в теореме 12.16; там было доказано, что

$$f_i(P/G) = \binom{d-j}{d-i}. \quad (4)$$

Заметим, что при $i < j \leq d$ обе части (4) равны 0, а потому (4) выполняется и при $0 \leq j \leq d$. Если же $\dim G = j = -1$, то ясно, что

$$f_i(P/G) = f_i(P). \quad (5)$$

Из (2) – (5) вытекает искомое соотношение. $\square$

Напомним, что наша цель – установить, что размерность $\text{aff } f(P_\sigma^d)$ равна $\lfloor d/2 \rfloor$. Как мы увидим ниже, из теоремы 17.1 следует, что эта размерность не больше чем $\lfloor d/2 \rfloor$. Для того чтобы убедиться, что она и не меньше $\lfloor d/2 \rfloor$, нам потребуются следующая лемма. Для упрощения записи положим

$$m := \lfloor (d-1)/2 \rfloor, \quad n := \lfloor d/2 \rfloor.$$

Заметим, что $d = m + n + 1$.

ЛЕММА 17.2. Для $i = 0, \dots, n$ пусть P_i – циклический многогранник типа $C(p+i, d)$, где p – некоторое фиксированное натуральное число, удовлетворяющее условию $p \geq d+1$.

Тогда f -векторы $f(P_i)$, $i = 0, \dots, n$, образуют аффинно-независимое семейство в $\mathbb{R}^d$.

Доказательство. f -вектор многогранника P_i имеет вид

$$f(P_i) = \left(\binom{p+i}{1}, \dots, \binom{p+i}{n}, f_n(P_i), \dots, f_{d-1}(P_i) \right)$$

(см. теорему 13.5 и следствие 13.8). Аффинная независимость векторов $f(P_i)$ равносильна тому, что векторы $\bar{f}(P_i)$, определённые соотношением

$$\bar{f}(P_i) := \left(1, \binom{p+i}{1}, \dots, \binom{p+i}{n}, f_n(P_i), \dots, f_{d-1}(P_i) \right),$$

линейно-независимы. В терминах матриц это равносильно тому, что $(n+1) \times (d+1)$ -матрица, строками которой служат $\bar{f}(P_i)$, имеет ранг $n+1$. Рассмотрим подматрицу A этой матрицы, образованную первыми $n+1$ столбцами, т.е.

$$A := \left(\binom{p+i}{j} \right)_{i=0, \dots, n; j=0, \dots, n}.$$

Для завершения доказательства леммы достаточно убедиться, что матрица A обратима. Положим

$$B := \left(\binom{-p+j}{n-i} \right)_{i=0, \dots, n; j=0, \dots, n},$$

$$C := AB = (c_{ij})_{i=0, \dots, n; j=0, \dots, n}.$$

Тогда

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^n \binom{p+i}{k} \binom{-p+j}{n-k} = \binom{i+j}{n}$$

(см. формулу (7) из добавления 3). Значит, у матрицы C на побочной диагонали (т.е. на местах (i, j) с $i+j=n$) стоят единицы, а выше этой диагонали – нули. Поэтому

$$|\det C| = 1,$$

откуда и следует, что A — обратимая матрица. $\square$

Индукцией по n нетрудно убедиться в том, что определитель рассмотренной выше матрицы A равен 1. Поэтому при желании обратимость этой матрицы можно установить, и не ссылаясь на формулу (7) из добавления 3.

Докажем теперь обещанный результат о размерности $\text{aff } f(\mathcal{P}_\sigma^d)$:

ТЕОРЕМА 17.3. Аффинная оболочка $\text{aff } f(\mathcal{P}_\sigma^d)$ множества $f(\mathcal{P}_\sigma^d)$ имеет размерность $\lfloor d/2 \rfloor$.

Доказательство. Рассмотрим следующую систему из $d+1$ линейных (однородных) уравнений относительно $d+1$ неизвестных $x_0, \dots, x_{d-1}, x_d$

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j \binom{d-j}{d-i} x_j = x_i, \quad i=0, \dots, d. \quad (6)$$

Если мы припишем x_d значение 1, то получим систему из $d+1$ линейных уравнений относительно d неизвестных $x_0, \dots, x_{d-1}$. (Заметим, что если d нечётно, то последнее уравнение этой системы (с $i=d$) будет неоднородным.) Теорема 17.1 говорит нам, что для любого многогранника $P \in \mathcal{P}_\sigma^d$

$$(x_0, \dots, x_{d-1}) = (f_0(P), \dots, f_{d-1}(P))$$

представляет собой решение этой системы. Иначе говоря, если обозначить множество её решений через S , то $f(\mathcal{P}_\sigma^d) \subset S$, откуда

$$\text{aff } f(\mathcal{P}_\sigma^d) \subset \text{aff } S = S,$$

а значит,

$$\dim (\text{aff } f(\mathcal{P}_\sigma^d)) \leq \dim S.$$

Но, как легко видеть, уравнения (6), отвечающие нечётным i , независимы. Так как число нечётных значений i равно $m+1$, мы заключаем, что

$$\dim S \leq d - (m+1) = n,$$

откуда следует, что

$$\dim(\operatorname{aff} f(\mathcal{P}_\sigma^d)) \leq n.$$

Чтобы доказать обратное неравенство, применим лемму 17.2. Пусть многогранники P_i таковы, как указано в её формулировке, а Q_i – двойственные к ним многогранники, $i=0, \dots, n$. Тогда, в силу теорем 13.5 и 12.10, $f(Q_i) \in f(\mathcal{P}_\sigma^d)$. Далее, поскольку, согласно лемме 17.2, векторы $f(P_i)$ аффинно-независимы, то аффинно-независимы и векторы $f(Q_i)$. Число этих последних равно $n+1$, а потому размерность $\operatorname{aff} f(\mathcal{P}_\sigma^d)$ не меньше n . Теорема доказана. $\square$

Для $i=0, \dots, d$ обозначим через H_i множество всех точек $(x_0, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^d$, таких что

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j \binom{d-j}{d-i} x_j = x_i;$$

как и в приведённом выше доказательстве, мы считаем, что $x_d = 1$. Ясно, что $H_0 = \mathbb{R}^d$, а при $i \geq 1$ каждое из множеств H_i представляет собой некоторую гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$. В ходе доказательства теоремы 17.3 мы установили, что

$$n = \dim \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \text{ неч.}}}^d H_i \geq \dim \bigcap_{i=0}^d H_i \geq \dim(\operatorname{aff} f(\mathcal{P}_\sigma^d)) \geq n.$$

Мы имеем также

$$\operatorname{aff} f(\mathcal{P}_\sigma^d) \subset \bigcap_{i=0}^d H_i \subset \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \text{ неч.}}}^d H_i,$$

а потому можно заключить, что

$$\operatorname{aff} f(\mathcal{P}_\sigma^d) = \bigcap_{i=0}^d H_i = \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \text{ неч.}}}^d H_i.$$

Таким образом, мы получили "представления" аффинного подпространства $\operatorname{aff} f(\mathcal{P}_\sigma^d)$ в виде пересечения семейств гиперплоскостей (так как $H_0 = \mathbb{R}^d$, то это множество можно опустить).

В действительности представление $\text{aff } f(\mathcal{P}_\sigma^d)$ в виде пересечения H_i с нечётными номерами i является "минимальным" в том смысле, что в нём фигурирует наименьшее возможное число гиперплоскостей. Ниже будут приведены и другие "представления" подобного рода. Мы, однако, предпочитаем формулировать соответствующие результаты в терминах линейных уравнений, а не в геометрических терминах.

Систему линейных уравнений с d неизвестными $x_0, \dots, x_{d-1}$ будем называть системой Дена – Коммервилля для простых d -многогранников, если множество её решений в точности совпадает с $\text{aff } f(\mathcal{P}_\sigma^d)$. Система Дена – Коммервилля, которая содержит наименьшее возможное число уравнений, называется минимальной. Из теоремы 17.3 следует, что это минимальное число равно

$$d - \lfloor d/2 \rfloor = \lfloor (d+1)/2 \rfloor.$$

Любая подсистема системы Дена – Коммервилля, состоящая из $\lfloor (d+1)/2 \rfloor$ независимых уравнений, снова будет системой Дена – Коммервилля (и притом минимальной).

Из сделанных выше замечаний немедленно вытекает следующий результат:

ТЕОРЕМА 17.4. Уравнения

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j \binom{d-j}{d-i} x_j = x_i, \quad i = 0, \dots, d,$$

где $x_d = 1$, образуют систему Дена – Коммервилля. Уравнения, отвечающие нечётным значениям i , образуют минимальную систему Дена – Коммервилля.

При рассмотрении систем Дена – Коммервилля удобно пользоваться матричными обозначениями. Будем писать

$$x := \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{pmatrix};$$

при этом всегда предполагается, что $x_d = 1$. Определим $(d+1)$

$(d+1) \times (d+1)$ -матрицу A формулой

$$A := \left((-1)^j \binom{d-j}{d-i} \right)_{i=0, \dots, d; j=0, \dots, d}.$$

Тогда система Дена – Коммервилля из теоремы 17.4 примет вид

$$Ax = x. \quad (7)$$

Зная эту конкретную систему Дена – Коммервилля, легко образовать новые: любая система, полученная из (7) умножением (обеих частей) слева на обратимую матрицу, по-прежнему будет системой Дена – Коммервилля. Ниже мы применяем этот приём.

ТЕОРЕМА 17.5. Уравнения

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j \binom{j}{i} x_j = \sum_{j=0}^d (-1)^{d+j} \binom{j}{d-i} x_j, \quad i=0, \dots, d,$$

где $x_d = 1$, образуют систему Дена – Коммервилля. Уравнения из этой системы, отвечающие значениям $i = 0, \dots, m$, образуют минимальную систему Дена – Коммервилля.

Доказательство. Рассмотрим следующую $(d+1) \times (d+1)$ -матрицу B :

$$B := \left((-1)^{i+j} \binom{j}{i} \right)_{i=0, \dots, d; j=0, \dots, d}.$$

Эта матрица обратима (см. соотношение (11) из добавления 3). Так как $x = Ax$ есть система Дена – Коммервилля, то таковой будет и система

$$Bx = BAx. \quad (8)$$

С точностью до множителя $(-1)^i$ левая часть i -го уравнения системы (8) совпадает с левой частью i -го уравнения из формулировки теоремы. Чтобы найти правую часть (8), предварительно вычислим элемент матрицы BA , стоящий в i -й строке и j -м столбце. Он равен

$$\sum_{k=0}^d (-1)^{i+k} \binom{k}{i} (-1)^j \binom{d-j}{d-k} = (-1)^{i+j} \sum_{k=0}^d (-1)^k \binom{k}{i} \binom{d-j}{d-k} \\ = (-1)^{i+j} (-1)^d \binom{j}{d-i}$$

(мы воспользовались формулой (12) из добавления 3). Поэтому правая часть i -го уравнения системы (8) равна

$$\sum_{j=0}^d (-1)^{i+j+d} \binom{j}{d-i} x_j = (-1)^i \sum_{j=0}^d (-1)^{d+j} \binom{j}{d-i} x_j.$$

Но последнее выражение с точностью до того же множителя $(-1)^i$ совпадает с правой частью i -го уравнения из формулировки теоремы. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы убедиться в том, что первые $m+1$ уравнений из рассматриваемой нами системы образуют минимальную систему Дена – Коммервилля, достаточно установить, что они независимы. Выше мы видели, что с точностью до множителя $(-1)^i$ уравнения нашей системы могут быть записаны в виде

$$Bx = BAx.$$

Перепишем эту систему так:

$$(B - BA)x = 0$$

(0 справа обозначает нулевую $(d+1) \times 1$ -матрицу). Теперь заметим, что, согласно проведённым выше вычислениям, элемент матрицы BA , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен 0 при $i, j \leq m$. Поэтому $(m+1) \times (m+1)$ -подматрица матрицы $B - BA$, расположенная в её левом верхнем углу, равна

$$B_0 := \left((-1)^{i+j} \binom{j}{i} \right)_{i=0, \dots, m; j=0, \dots, m}.$$

Она обратима (см. соотношение (11) из добавления 3), а значит, наши первые $m+1$ уравнений независимы. $\square$

ТЕОРЕМА 17.6. Уравнения

$$x_i = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{m+1+j}{i} \binom{m-i+j}{m-i} x_{m+1+j} + (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{k}{i} \binom{m+1+j}{d-k} \right) x_{m+1+j},$$

$$i=0, \dots, m$$

(где $x_d = 1$) образуют минимальную систему Дена – Коммервилля.

Доказательство. Рассмотрим следующие $(m+1) \times (d+1)$ -матрицы B_2 и C :

$$B_2 := \left((-1)^{i+j} \binom{j}{i} \right)_{i=0, \dots, m; j=0, \dots, d},$$

$$C := \left((-1)^{d+i+j} \binom{j}{d-i} \right)_{i=0, \dots, m; j=0, \dots, d}.$$

С их помощью минимальную систему Дена – Коммервилля из теоремы 17.5 можно записать так:

$$B_2 x = C x. \quad (9)$$

Пусть B_0 и B_1 – подматрицы матрицы B_2 , образованные соответственно её первыми $m+1$ и последними $(d+1) - (m+1) = n+1$ столбцами. (Отметим, что B_0 обозначает ту же матрицу, что и в доказательстве теоремы 17.6.) Аналогично пусть C_0 и C_1 – подматрицы матрицы C , составленные соответственно из её первых $m+1$ и последних $n+1$ столбцов. Тогда (9) можно переписать в виде

$$(B_0 - C_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (C_1 - B_1) \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Заметим теперь, что C_0 – нулевая матрица и, значит, $B_0 - C_0 = B_0$. Положим

$$D_0 := \left(\binom{j}{i} \right)_{i=0, \dots, m; j=0, \dots, m}.$$

В силу соотношения (11) из добавления (3) эта матрица является обратной к матрице B_0 . Поэтому умножение (10) на D_0 даёт новую минимальную систему Дена – Соммервилля

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = D_0 (C_1 - B_1) \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}.$$

Чтобы доказать, что эта система совпадает с системой из формулировки нашей теоремы, вычислим элементы матрицы $D_0 (C_1 - B_1)$. Имеем

$$C_1 - B_1 = \left((-1)^{n+i+j} \binom{m+1+j}{d-i} + (-1)^{m+i+j} \binom{m+1+j}{i} \right)_{i=0, \dots, m; j=0, \dots, n}.$$

Поэтому элемент матрицы $D_0 (C_1 - B_1)$, состоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \binom{k}{i} \left((-1)^{n+k+j} \binom{m+1+j}{d-k} + (-1)^{m+k+j} \binom{m+1+j}{k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k+j} \binom{k}{i} \binom{m+1+j}{k} + \sum_{k=0}^m (-1)^{n+k+j} \binom{k}{i} \binom{m+1+j}{d-k} \\ &= (-1)^j \binom{m+1+j}{i} \binom{m-i+j}{m-i} + \sum_{k=0}^m (-1)^{n+k+j} \binom{k}{i} \binom{m+1+j}{d-k} \end{aligned}$$

(см. соотношение (10) из добавления 3). Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы. $\square$

Отметим одно интересное следствие теоремы 17.6.

СЛЕДСТВИЕ 17.7. Пусть P — простой d -многогранник. Тогда числа $f_0(P), \dots, f_m(P)$ однозначно определяются числами $f_{m+1}(P), \dots, f_{d-1}(P)$.

Для всех предыдущих результатов, конечно, имеются двойственные утверждения о симплициальных d -многогранниках. Здесь мы приведем лишь одно из них, двойственное теореме 17.1 и представляющее собой уравнение Дена — Соммервилля для симплициальных d -многогранников:

СЛЕДСТВИЕ 17.8. Для всякого симплициального d -многогранника

$$\sum_{j=-1}^{d-1} (-1)^{d-1-j} \binom{j+1}{i+1} f_j(P) = f_i(P)$$

при $i = -1, \dots, d-1$.

Существует и совершенно иной подход к уравнениям Дена — Соммервилля; см. замечание в конце § 18.

§ 18. ТЕОРЕМА О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ГРАНЕЙ

В этом параграфе будет дан ответ на следующий вопрос: каково наибольшее число вершин, рёбер и т. д. у простого d -многогранника, $d \geq 3$, если задано число его гиперграней? Более того, мы выясним, какие именно многогранники имеют наибольшее число вершин, рёбер и т. д. Соответствующий результат, известный как теорема о максимальном числе граней, представляет собой одно из главных достижений современной теории выпуклых многогранников; он был доказан Макмюлленом в 1970 г.

Начнем с замечания, что все простые 3-многогранники с заданным числом гиперграней имеют одно и то же число вершин и одно и то же число рёбер; это вытекает из уравнений Дена — Соммервилля для $d=3$:

$$f_0(P) = 2f_2(P) - 4, \quad f_1(P) = 3f_2(P) - 6 \quad (1)$$

(см. начало § 17). Поэтому ниже мы будем считать, что $d \geq 4$.

Напомним (см. § 14), что для симплициальных смежных d -многогранников P с p вершинами выполнены соотношения

$$f_j(P) = \binom{p}{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

(мы сохраняем обозначения § 17: $m := \lfloor (d-1)/2 \rfloor, n := \lfloor d/2 \rfloor$).

Далее, для указанных значений j никакой симплициальный d -многогранник с p вершинами не может иметь большего числа j -граней. Итак, при $1 \leq j \leq n-1$ точная верхняя грань числа j -граней симплициальных d -многогранников с p вершинами равна

$$\binom{p}{j+1},$$

причём эта точная верхняя грань достигается для смежных многогранников. Напротив, если P — симплициальный не смежный многогранник с p вершинами, то

$$f_j(P) < \binom{p}{j+1}$$

для $j = n-1$, а, возможно, также и для меньших значений j .

Проводя те же рассуждения в двойственной постановке, убеждаемся, что при $m+1 \leq j \leq d-2$ точная верхняя грань числа j -граней простых d -многогранников с p гипергранями равна

$$\binom{p}{d-j},$$

и эта точная верхняя грань достигается для дуально-смежных многогранников (многогранников, двойственных к смежным); далее, если P — простой d -многогранник с p гипергранями, который не является дуально-смежным, то

$$f_j(P) \leq \binom{p}{d-j}$$

для $j = m+1$, а возможно и для бо́льших значений j . Главный результат настоящего параграфа обобщает оба эти утверждения.

Чтобы сформулировать его, введём в рассмотрение следующие величины, определённые для $j \geq 0$:

$$\Phi_j(d, p) := \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} \binom{p-d+i-1}{i} + \sum_{i=0}^m \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i}. \quad (2)$$

В этих обозначениях теорема о максимальном числе граней формулируется так:

ТЕОРЕМА 18.1. Для любого простого d -многогранника P с p гипергранями

$$f_j(P) \leq \Phi_j(d, p), \quad j = 0, \dots, d-2.$$

Если P является дуально-смежностным, то

$$f_j(P) = \Phi_j(d, p), \quad j = 0, \dots, d-2,$$

если же нет, то

$$f_j(P) < \Phi_j(d, p), \quad j = 0, \dots, m+1$$

(а возможно и для некоторых бо́льших значений j).

То что теорема 18.1 верна для $d=3$, легко проверить непосредственно. Напомним, что каждый 3-многогранник смежностен, а значит, каждый 3-многогранник является также и дуально-смежностным. Поэтому при $d=3$ утверждение теоремы равносильно тому, что для любого простого 3-многогранника P с p гипергранями выполнены соотношения $f_0(P) = \Phi_0(3, p)$ и $f_1(P) = \Phi_1(3, p)$. Замечая, что $\Phi_0(3, p) = 2p-4$ и $\Phi_1(3, p) = 3p-6$, видим, что это утверждение немедленно следует из (1).

Так как $\Phi_{d-1}(d, p) = p$ и $\Phi_d(d, p) = 1$, первые два утверждения теоремы верны и при $j = d-1$ и $j = d$. Приводимое ниже доказательство по существу покрывает и эти случаи.

Обсуждение, которое мы провели перед тем, как сформулировать теорему 18.1, показывает, что должно выполняться равенство

$$\Phi_j(d, p) = \binom{p}{d-j}, \quad j = m+1, \dots, d-2.$$

Мы ещё вернемся к этому после того, как докажем теорему.

Отметим также, что, как показывает теорема 18.1, дуально-смежные многогранники замечательно богаты гранями: среди всех простых d -многогранников с p гипергранями дуально-смежные имеют наибольшее возможное количество j -граней для всех значений j от 0 до $d-2$ включительно.

Заметим, наконец, что оценка сверху $f_j(P) \leq \Phi_j(d, p)$ на самом деле выполнена для любого (т. е. не обязательно простого) d -многогранника P с p гранями; это вытекает из того, что для любого d -многогранника P существует простой d -многогранник P' с тем же числом гиперграней, что и у P , и с не меньшим, чем у P , числом j -граней при $0 \leq j \leq d-2$ (см. упр. 12.4).

Доказательство. Доказательство разбито на три части. В части А вводятся некоторые числа $g_i(P)$, связанные с данным простым многогранником P . В части В устанавливаются связи между числами $g_i(P)$ и соответствующими числами $g_i(F)$ для гиперграней F многогранника P . Наконец, в части С с помощью результатов частей А и В доказываются утверждения теоремы.

А. Ниже P обозначает простой d -многогранник в $\mathbb{R}^d$, а w — вектор из $\mathbb{R}^d$, допустимый для P (см. теорему 15.1). Как это описано в § 15, при помощи вектора w неориентированный граф $\mathcal{G}(P)$ превращается в ориентированный граф $\mathcal{G}(P, w)$. (По поводу используемых понятий теории графов см. добавление 2.) Следующее утверждение — непосредственное следствие теоремы 12.12:

- (а) Для любой вершины x многогранника P сумма валентности входа и валентности выхода равна d .

Нам понадобятся ещё некоторые определения. Назовём k -звездой ($k=0, \dots, d$) всякое множество, образованное какой-нибудь вершиной x многогранника P и k его рёбрами, инцидентными ей; при этом вершина x называется центром k -звезды. Если у k -звезды все рёбра направлены к ее центру, то она называется поглощающей, если все от центра — излучающей.

Между k -гранями и поглощающими (или излучающими) k -звёздами существует тесная связь:

- (b) Пусть x — центр поглощающей k -звезды и F — наименьшая грань P , которая эту звезду содержит. Тогда $\dim F = k$, причём F является единственной k -гранью, содержащей рассматриваемую k -звезду, а x — низшей вершиной F . То же самое будет верно, если заменить "поглощающая" на "излучающая", а "низшая" — на "высшая".

Действительно, согласно утверждению (a) теоремы 12.17, F представляет собой k -грань. Любая другая грань, содержащая нашу поглощающую k -звезду, должна иметь размерность $> k$ (см. следствие 5.5). Далее, как вытекает из утверждения (b) теоремы 12.17, единственными смежными с x вершинами F служат концевые точки $x_1, \dots, x_k$ рёбер $[x, x_1], \dots, [x, x_k]$, принадлежащих нашей k -звезде. Отсюда следует, что вершина x отделена от смежных с ней вершин F некоторой "горизонтальной" гиперплоскостью H . Если теперь применить к грани F теорему 11.8, то мы получим, что x является низшей вершиной F . Для излучающих звёзд доказательство аналогично.

Используя (b), докажем следующее вспомогательное утверждение:

- (c) Число j -граней $f_j(P)$ многогранника P равно числу его поглощающих j -звёзд, $j=0, \dots, d$.

Мы докажем, что каждая j -грань содержит в точности одну поглощающую j -звезду и каждая такая звезда содержится в некоторой j -грани; тем самым (c) будет доказано. Пусть F — некоторая j -грань. Тогда каждая вершина F служит центром единственной j -звезды в F ; это следует из теорем 12.15 и 12.12. Ясно, что та j -звезда, центр которой совпадает с низшей вершиной F , является j -поглощающей. С другой стороны, согласно

(b), центр любой другой j -поглощающей звезды, расположенной в F , также должен совпадать с низшей вершиной F . Следовательно, F содержит в точности одну поглощающую j -звезду. Наконец, из (b) немедленно следует, что всякая поглощающая j -звезда в P содержится в некоторой (а на самом деле единственной) j -границе P . Утверждение (c) доказано.

Пусть теперь $g_i(P)$, $i=0, \dots, d$, обозначает число вершин P , для которых валентность входа равна i . Высшая вершина многогранника P имеет валентность входа, равную 0, и по теореме 15.2 это единственная вершина P с таким свойством. Следовательно,

$$(d) \quad g_0(P) = 1.$$

Непосредственно из определений вытекает, что число поглощающих j -звезд в P равно

$$\sum_{i=0}^d \binom{i}{j} g_i(P).$$

Таким образом, в силу (c),

$$(e) \quad f_j(P) = \sum_{i=0}^d \binom{i}{j} g_i(P) \quad \text{для } j=0, \dots, d.$$

Полагая

$$A := \left(\binom{j}{i} \right)_{i=0, \dots, d; j=0, \dots, d},$$

мы можем переписать (e) в виде матричного тождества

$$\begin{pmatrix} f_0(P) \\ \vdots \\ f_d(P) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} g_0(P) \\ \vdots \\ g_d(P) \end{pmatrix}.$$

Но матрица A обратима. В самом деле,

$$A^{-1} = \left((-1)^{i+j} \binom{j}{i} \right)_{i=0, \dots, d; j=0, \dots, d}$$

(см. соотношение (11) из добавления 3). Поэтому наше матричное тождество эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix} g_0(P) \\ \vdots \\ g_d(P) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} f_0(P) \\ \vdots \\ f_d(P) \end{pmatrix},$$

а значит,

$$(f) \quad g_i(P) = \sum_{j=0}^d (-1)^{i+j} \binom{j}{i} f_j(P), \quad i=0, \dots, d.$$

Ясно, что правая часть в (f) не зависит от w . Таким образом, хотя данное выше определение чисел $g_i(P)$ зависит от конкретного выбора допустимого вектора w , фактически

(g) числа $g_i(P)$, $i=0, \dots, d$, не зависят от выбора w .

Очевидно, что если вектор w допустим для P , то допустим для P и вектор $-w$. Когда вектор w заменяется на $-w$, направления всех рёбер P меняются на противоположные. В частности, при такой замене вершины, имевшие валентность входа i относительно w , будут иметь валентность входа $d-i$ относительно $-w$ (см. (a)). Учитывая (g), заключаем, что

$$(h) \quad g_i(P) = g_{d-i}(P), \quad i=0, \dots, d.$$

Записывая (e) в виде

$$\begin{aligned} f_j(P) &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} g_i(P) + \sum_{i=n+1}^d \binom{i}{j} g_i(P) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} g_i(P) + \sum_{i=0}^m \binom{d-i}{j} g_{d-i}(P) \end{aligned}$$

и затем используя (h), получаем

$$(1) \quad f_j(P) = \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} g_i(P) + \sum_{i=0}^m \binom{d-i}{j} g_i(P); \quad j=0, \dots, d.$$

Это соотношение показывает, что числа $f_j(P)$ представляются в виде линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами чисел $g_i(P)$, причём достаточно чисел $g_i(P)$ с индексами i , не превосходящими n . При этом если $j \leq m+1$, то коэффициент при каждом $g_i(P)$ строго положителен по крайней мере в одной из двух сумм в (1).

В. Если P — простой d -многогранник, то каждая его гипергрань F также является простым многогранником (теорема 12.15). Поэтому для F , в соответствии с частью А доказательства, определены числа $g_i(F)$, $i=0, \dots, d$.

Ниже F обозначает некоторую гипергрань простого d -многогранника P . Для каждой вершины x этой гиперграни определим её относительную валентность входа в F как валентность входа вершины x в подграфе $\mathcal{G}(P, w)$, порождённом вершинами F ; иными словами, относительная валентность входа для вершины x равна числу рёбер $[x, y]$ гиперграни F , направленных к x . Далее, если вектор w допустим для P , то он допустим и для F . Поэтому для любой вершины x гиперграни F её валентность входа в графе $\mathcal{G}(F, w)$ равна её относительной валентности входа в F . Таким образом,

(j) $g_i(F)$ равно числу тех вершин гиперграни F , для которых относительная валентность входа равна i , $i=0, \dots, d-1$.

Пусть w — такой вектор, допустимый для P , что любая вершина P , не принадлежащая F , расположена ниже любой вершины F (см. теорему 15.3). Тогда для данной вершины x гиперграни F относительная валентность входа просто совпадает с её валентностью входа в графе $\mathcal{G}(P, w)$. В силу (j) отсюда следует, что

$$(k) \quad g_i(F) \leq g_i(P), \quad i=0, \dots, d-1.$$

Допустим, что для некоторого i в (k) имеет место строгое неравенство. Тогда найдётся по крайней мере одна вершина P , не принадлежащая F , для которой валентность входа равна i . Обозначим эту вершину через x . В силу (a) валентность выхода

x равна $d-i$. Значит, x является центром некоторой (единственной) излучающей $(d-i)$ -звезды. Обозначим через G наименьшую грань P , которая эту звезду содержит. В силу (b), G представляет собой $(d-i)$ -грань и x служит высшей вершиной этой грани. Поскольку x не принадлежит F , а любая вершина F расположена выше любой вершины P , не лежащей в F , мы заключаем, что G и F не пересекаются. Заметим теперь, что, согласно теореме 10.4, G совпадает с пересечением всех гиперграней, содержащих G , а так как многогранник P — простой, число таких гиперграней равно i . Обозначим их $F_1, \dots, F_i$. Тогда $i+1$ гиперграней $F, F_1, \dots, F_i$ имеют пустое пересечение, так как F и G между собой не пересекаются. Ввиду теоремы 14.7 отсюда следует, что $i+1 > n$, если P — дуально-смежностный многогранник. Другими словами:

- (1) Если P — дуально-смежностный многогранник, то $g_i(F) = g_i(P)$ для $i = 0, \dots, n-1$.

Напомним, что в проведённых выше рассуждениях F было произвольной гипергранью P . Докажем теперь утверждение, обратное к (1):

- (m) Если многогранник P не является дуально-смежностным, то у него найдётся такая гипергрань F , что по крайней мере для одного из $i = 0, \dots, n-1$ выполнено строгое неравенство $g_i(F) < g_i(P)$.

Чтобы доказать это утверждение, надо провести те же самые рассуждения, только в обратном порядке. Если многогранник P не дуально-смежностен, то найдётся такое $k \leq n$, что некоторые k из гиперграней P , скажем $F_1, \dots, F_k$, имеют пустое пересечение, в то время как пересечение любых $k-1$ гиперграней уже непусто (см. теорему 14.7). Обозначим через G пересечение гиперграней $F_1, \dots, F_{k-1}$. Тогда, по теореме 12.14, G представляет собой некоторую грань P , причём её размерность равна $d-(k-1)$. Пусть w — такой допустимый вектор для P , что любая из вершин P , не принадлежащих F_k , лежит ниже каждой вершины F_k (см. теорему 15.3). Обозначим через x высшую вершину G . В силу теорем 12.12 и 12.15 её валентность выхода не меньше $d-(k-1)$, а потому её валентность входа не больше $k-1$ (см.

(а)). Обозначая эту валентность входа через i , мы видим, что $i \leq n-1$ и $g_i(F_k) < g_i(P)$.

С. Пусть P — простой d -многогранник с p гипергранями и w — вектор, допустимый для P . Под i -инцидентностью, $i = 0, \dots, d-1$, мы будем понимать всякую пару вида (F, x) , где F — гипергрань P , а x — её вершина, у которой относительная валентность входа в F равна i . Обозначим через I_i общее число i -инцидентностей. Из (j) вытекает, что

$$(n) \quad I_i = \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} g_i(F) \quad \text{для } i = 0, \dots, d-1.$$

Объединяя (n) и (к), получаем

$$(o) \quad I_i \leq p g_i(P) \quad \text{для } i = 0, \dots, d-1.$$

Объединяя (n) и (l), получаем:

$$(p) \quad \text{если } P \text{ — дуально-смежностный многогранник, то } I_i = p g_i(P) \text{ для } i = 0, \dots, n-1.$$

Наконец, объединяя (n) и (m), получаем:

$$(q) \quad \text{Если многогранник } P \text{ не является дуально-смежностным, то по крайней мере для одного из } i = 0, \dots, n-1 \text{ выполнено строгое неравенство } I_i < p g_i(P).$$

Докажем теперь следующее соотношение:

$$(r) \quad I_i = (d-i) g_i(P) + (i+1) g_{i+1}(P), \quad i = 0, \dots, d-1.$$

С этой целью вычислим I_i путём суммирования по вершинам многогранника P , а не по его гиперграням, как это делалось в (n). Пусть x — некоторая вершина P . Тогда у P есть в точности d гиперграней, которые содержат x , а по теореме 12.12 число тех рёбер, которым принадлежит эта вершина, также в точности равно d . Согласно теореме 12.15, каждая гипергрань P представляет собой простой многогранник. Следовательно, для любой гиперграни, содержащей x , в точности одно из d рёбер, которым принадлежит x , не содержится в этой гиперграни (см. теорему 12.12). Это ребро назовём внешним для рассматриваемой гиперграни. Заметим, что и обратно, каждое ребро, содержащее x , служит внешним для некоторой гиперграни, которая содержит x ;

это немедленно следует из теоремы 12.17. Далее, для данной гипергранни F , содержащей x , пара (F, x) тогда и только тогда образует i -инцидентность, когда выполнено одно из следующих двух условий:

- (α) x имеет валентность входа i в P , причём ребро, внешнее для гипергранни F , направлено от x ;
- (β) x имеет валентность входа $i+1$ в P , причём ребро, внешнее для гипергранни F , направлено к x .

Если вершина x имеет валентность входа, равную i , то найдутся $d-i$ гипергранней F , таких что имеет место (α). Если же её валентность входа равна $i+1$, то найдутся $i+1$ гипергранней F , для которых выполнено (β). Тем самым соотношение (r) доказано.

Объединяя (α) и (r) получаем

$$g_{i+1}(P) \leq \frac{p-d+i}{i+1} g_i(P), \quad i=0, \dots, d-1.$$

Так как $g_0(P)=1$ (в силу (d)), то по индукции мы заключаем, что

$$(\text{в}) \quad g_i(P) \leq \binom{p-d+i-1}{i}, \quad i=0, \dots, d.$$

Аналогичным образом, объединяя (p) и (r), получаем:

(t) Если P - дуально-смежностный многогранник, то

$$g_i(P) = \binom{p-d+i-1}{i}$$

для $i=0, \dots, n$.

А объединяя (q) и (r), приходим к утверждению:

(u) Если многогранник P не является дуально-смежностным, то по крайней мере для одного из $i=0, \dots, n$ выполнено стро-

гое неравенство

$$g_i(P) < \binom{p-d+i-1}{i}.$$

Теперь доказательство завершается быстро. Объединяя (i) и (s), получаем

$$f_j(P) \leq \Phi_j(d, p), \quad j=0, \dots, d,$$

чем доказано первое утверждение теоремы. Далее, объединяя (i) и (t), видим, что

$$f_j(P) = \Phi_j(d, p), \quad j=0, \dots, d,$$

если многогранник P — дуально-смежностный. Этим доказано второе утверждение. Наконец, как мы уже отмечали выше, при $0 \leq j \leq m+1$ коэффициент при каждом $g_i(P)$ строго положителен по крайней мере в одной из двух сумм, фигурирующих в соотношении (i). Поэтому, объединяя (i) и (u), получаем и третье утверждение теоремы. $\square$

Приведённое выше доказательство теоремы о максимальном числе граней содержало лишь одно вычисление, а именно, при выводе формулы (f) мы использовали формулу (II) из добавления 3. Следует, однако, отметить, что формула (f) нам, собственно говоря, не была нужна — достаточно было знать, что числа $g_i(P)$ можно каким-то образом выразить через $f_j(P)$. А чтобы убедиться в этом последнем, достаточно обратимости матрицы A , которая немедленно вытекает из того факта, что эта матрица — верхнетреугольная с единицами на диагонали. Мы включили в доказательство явную формулу (f) только потому, что она имеет отношение к материалу § 20.

Как было отмечено сразу после формулировки теоремы 18.1, выражение для $\Phi_j(d, p)$ может быть упрощено при $m+1 \leq j \leq d-2$. Далее, при $j=0$ выражение для $\Phi_j(d, p)$ оказывается особенно простым, а для прочих j преобразуется к виду, который иногда бывает удобен:

ТЕОРЕМА 18.2. (а) Значение $\Phi_0(d, p)$ равно

$$\binom{p-m-1}{n} + \binom{p-n-1}{m}.$$

(б) Для $j=1, \dots, n$ значение $\Phi_j(d, p)$ равно

$$\binom{p}{d-j} + \binom{p-d+j-1}{j} \binom{p-d+n}{n-j} - \sum_{i=m+1}^{d-j} \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i}.$$

(с) Для $j=m+1, \dots, d-2$ значение $\Phi_j(d, p)$ равно

$$\binom{p}{d-j}.$$

Доказательство. (а) Согласно определению (2), имеем

$$\Phi_0(d, p) = \sum_{i=0}^n \binom{p-d+i-1}{i} + \sum_{i=0}^m \binom{p-d+i-1}{i}.$$

Поэтому наше утверждение вытекает из формулы (9) добавления 2.

(б) С использованием тождеств из добавления 3 первая из сумм в (2) может быть преобразована так¹:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} \binom{p-d+i-1}{i} \\ & \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^j \binom{i}{j} \binom{d-p}{i} \stackrel{(10)}{=} (-1)^n \binom{d-p}{j} \binom{d-p-j-1}{n-j} \\ & \stackrel{(2)}{=} (-1)^n (-1)^j \binom{-d+p+j-1}{j} (-1)^{n-j} \binom{-d+p+j+1+n-j-1}{n-j} \\ & = \binom{p-d+j-1}{j} \binom{p-d+n}{n-j}. \end{aligned}$$

¹ Ниже над знаками равенства указаны номера соответствующих тождеств из добавления 3. — Прим. ред.

Таким образом, мы получили второе слагаемое в требуемом выражении.

Теперь докажем, что для $0 \leq j \leq d$

$$\sum_{i=0}^{d-j} \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i} = \binom{p}{d-j}. \quad (3)$$

Действительно, используя тождества из добавления 3, последовательно получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d-j} \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i} &\stackrel{(3)}{=} \sum_{i=0}^{d-j} (-1)^{d-i-j} \binom{-j-1}{d-i-j} \binom{p-d+i-1}{i} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^{d-j} (-1)^{d-i-j} \binom{-j-1}{d-i-j} (-1)^i \binom{-p+d}{i} \\ &= (-1)^{d-j} \sum_{i=0}^{d-j} \binom{-p+d}{i} \binom{-j-1}{(d-j)-i} \\ &\stackrel{(7)}{=} (-1)^{d-j} \binom{-p+d-j-1}{d-j} \stackrel{(2)}{=} \binom{p}{d-j}, \end{aligned}$$

как и утверждалось.

Ввиду (3) вторая сумма в (2) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^m \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{d-j} \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i} - \sum_{i=m+1}^{d-j} \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i} \\ &= \binom{p}{d-j} - \sum_{i=m+1}^{d-j} \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i}. \end{aligned}$$

Тем самым мы получили и два оставшихся слагаемых в требуемом выражении.

(с) Хотя мы уже знаем, что это утверждение справедливо, всё же дадим его прямое доказательство. При $j \geq n+1$ каждое слагаемое первой суммы в (2) равно 0. Во второй сумме все слагае-

мые, отвечающие значениям $i > d-j$, также равны 0. Значит,

$$\Phi_j(d, p) = \sum_{i=0}^{d-j} \binom{d-i}{j} \binom{p-d+i-1}{i}.$$

Отсюда и из (3) следует, что

$$\Phi_j(d, p) = \binom{p}{d-j}.$$

В случае $m=n$ всё доказано. Если же $m=n-1$, то остаётся ещё рассмотреть значение $j=m+1=n$. Но это легко делается — надо просто воспользоваться выражением для $\Phi_j(d, p)$ из утверждения (b). Подробности предоставляем читателю. $\square$

По двойственности соответствующая теорема о максимальном числе граней имеет место и для симплициальных d -многогранников. Она формулируется так:

СЛЕДСТВИЕ 18.3. Для любого симплициального d -многогранника P с p вершинами выполнены оценки

$$f_j(P) \leq \Phi_{d-1-j}(d, p), \quad j=1, \dots, d-1.$$

Если P является смежностным, то

$$f_j(P) = \Phi_{d-1-j}(d, p), \quad j=1, \dots, d-1,$$

если же нет, то

$$f_j(P) < \Phi_{d-1-j}(d, p), \quad j=n-1, \dots, d-1$$

(а возможно, и для меньших значений j).

Наконец, интересно отметить, что из пунктов (f) и (h) доказательства теоремы 18.1 вытекают соотношения

$$\sum_{j=0}^d (-1)^j \binom{d}{j} f_j(P) = \sum_{j=0}^d (-1)^{d+j} \binom{d}{d-j} f_j(P), \quad i=0, \dots, d,$$

т. е. набор $f_0(P), \dots, f_{d-1}(P)$ удовлетворяет системе Дена – Соммервилля из теоремы 17.5. Таким образом, мы имеем ещё одно, независимое доказательство справедливости уравнений Дена – Соммервилля, не опирающееся на формулу Эйлера.

§ 19. ТЕОРЕМА О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ГРАНЕЙ

В предыдущем параграфе мы определили максимальное возможное число вершин, рёбер и т. д. у простого d -многогранника, $d \geq 3$, с заданным числом гиперграней. В этом параграфе будет определено минимальное возможное число вершин, рёбер и т. д. Соответствующий результат, известный как теорема о минимальном числе граней, был получен Барнеттом в 1971–73 гг. Как и теорема о максимальном числе граней, он представляет собой одно из главных достижений современной теории выпуклых многогранников.

Как мы видели в начале § 18, все простые 3-многогранники с данным числом гиперграней имеют одно и то же число вершин и одно и то же число рёбер. Поэтому, как и в случае теоремы о максимальном числе граней, интерес представляет лишь случай $d \geq 4$.

Положим

$$\varphi_j(d, p) := \begin{cases} (d-1)p - (d+1)(d-2) & \text{при } j=0, \\ \binom{d}{j+1} p - \binom{d+1}{j+1} (d-1-j) & \text{при } j=1, \dots, d-2. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\varphi_{d-2}(d, p) = d p - \binom{d+1}{d-1} = d p - (d^2 + d)/2.$$

В этих обозначениях теорема о минимальном числе граней может быть сформулирована следующим образом:

ТЕОРЕМА 19.1. Для любого простого d -многогранника P с p гипергранями

$$f_j(P) \geq \varphi_j(d, p), \quad j = 0, \dots, d-2,$$

и существуют простые d -многогранники P с p гипергранями, для которых

$$f_j(P) = \varphi_j(d, p), \quad j = 0, \dots, d-2.$$

Поскольку $\varphi_0(3, p) = 2p - 4$ и $\varphi_1(3, p) = 3p - 6$, то, как и в случае теоремы о максимальном числе граней, мы сразу видим что для $d = 3$ наше утверждение справедливо, причём фактически для всех простых 3-многогранников имеет место равенство.

Прежде чем доказывать эту теорему, введём некоторые обозначения и установим ряд подготовительных лемм.

Напомним читателю, что системой гиперграней многогранника P называется всякое непустое множество $\mathcal{S}$ его гиперграней. Для заданной системы $\mathcal{S}$ гиперграней P мы обозначаем через $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ объединение подграфов $\mathcal{G}(F)$, $F \in \mathcal{S}$, графа $\mathcal{G}(P)$ и говорим, что система $\mathcal{S}$ является связной, если связан граф $\mathcal{G}(\mathcal{S})$. Эти понятия были введены нами в § 15, где мы также установили несколько важных результатов, касающихся свойств связности $\mathcal{G}(\mathcal{S})$.

Пусть $\mathcal{S}$ — система гиперграней многогранника P , а G — его грань. Будем говорить, что G принадлежит $\mathcal{S}$ или является гранью системы $\mathcal{S}$, если G есть грань некоторой гиперграней F , входящей в семейство $\mathcal{S}$. В частности, вершины $\mathcal{S}$ — это вершины гиперграней, входящих в систему $\mathcal{S}$.

Ниже мы ограничимся рассмотрением систем гиперграней простых многогранников. Пусть $\mathcal{S}$ — некоторая система гиперграней простого d -многогранника P и x — одна из вершин $\mathcal{S}$. Тогда x служит вершиной по меньшей мере одного из элементов $F \in \mathcal{S}$. Поэтому $d-1$ рёбер F , инцидентных x , являются рёбрами $\mathcal{S}$. Если оставшееся ребро P , инцидентное x , также принадлежит $\mathcal{S}$, то мы говорим, что x является внутренней вершиной системы $\mathcal{S}$ (или что вершина x является внутренней в $\mathcal{S}$). Если же это оставшееся ребро P , инцидентное x , не принадлежит $\mathcal{S}$, то будем говорить, что x служит наружной вершиной системы $\mathcal{S}$ (или что вершина x является наружной в $\mathcal{S}$). Иначе говоря, данная вершина x системы $\mathcal{S}$ тогда и только тогда является наружной, когда она служит вершиной лишь для одного элемента $\mathcal{S}$.

Первая из наших лемм гарантирует существование наружных вершин при выполнении некоторого очевидного условия. (Для последующего нам достаточно знать, что у систем, удовлетворяющих этому условию, существует хотя бы одна наружная вершина.)

ЛЕММА 19.2. Пусть $\mathcal{U}$ — такая система гиперграней простого d -многогранника P , что по крайней мере одна из вершин P не принадлежит $\mathcal{U}$. Тогда в $\mathcal{U}$ найдётся по меньшей мере d наружных вершин.

Доказательство. Если все вершины, принадлежащие $\mathcal{U}$, — наружные, то каждый из элементов $\mathcal{U}$ поставляет не менее d наружных вершин. Допустим, что некоторая вершина x системы $\mathcal{U}$ является внутренней. По условию леммы, у многогранника P существует вершина y , не принадлежащая $\mathcal{U}$. Ввиду d -связности графа $\mathcal{G}(P)$ (теорема 15.6), мы можем построить d независимых путей, соединяющих y и x . При проходе по i -му пути от y к x первую встретившуюся вершину, которая принадлежит $\mathcal{U}$, обозначим через x_i . Ясно, что предшествующее этой вершине ребро не принадлежит $\mathcal{U}$, а потому она является наружной в $\mathcal{U}$. Так как все x_i различны, мы приходим к нужному выводу. $\square$

В ходе доказательства теоремы 15.7 было установлено, что если $\mathcal{U}$ — связная система гиперграней P , содержащая не менее двух элементов, то у $\mathcal{U}$ найдётся такой элемент F_0 , что система $\mathcal{U} \setminus \{F_0\}$ остаётся связной. В случае простых многогранников P имеет место следующий гораздо более сильный результат:

ЛЕММА 19.3. Пусть $\mathcal{U}$ — связная система гиперграней простого d -многогранника P . Предположим, что хотя бы одна из вершин P не принадлежит $\mathcal{U}$ и что $\mathcal{U}$ содержит не менее двух элементов. Тогда найдётся такая пара (x_0, F_0) , состоящая из наружной вершины x_0 системы $\mathcal{U}$ и единственного элемента F_0 этой системы, содержащего x_0 , что система гиперграней $\mathcal{U} \setminus \{F_0\}$ тоже связна.

Доказательство. Из леммы 19.2 мы знаем, что $\mathcal{U}$ имеет наружные вершины. Пусть пара (x_1, F_1) образована наружной вершиной x_1 системы $\mathcal{U}$ и её единственным элементом F_1 .

который содержит x_1 . Допустим, что система $\mathcal{S} \setminus \{F_1\}$ не является связной. Пусть $\mathcal{S}_1$ — максимальная связная подсистема системы $\mathcal{S} \setminus \{F_1\}$. Докажем, что найдётся другая пара (x_2, F_2) , такая что объединение $\mathcal{S}_1 \cup \{F_1\}$ представляет собой связную подсистему системы $\mathcal{S} \setminus \{F_2\}$. Иначе говоря, если $\mathcal{S} \setminus \{F_1\}$ не связна, то мы можем таким образом заменить пару (x_1, F_1) на некоторую другую пару (x_2, F_2) , что максимальное число элементов в связных подсистемах системы $\mathcal{S} \setminus \{F_2\}$ больше, чем максимальное число элементов в связных подсистемах системы $\mathcal{S} \setminus \{F_1\}$. Продолжение этого процесса и приводит к такой паре (x_0, F_0) , что система $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$ связна.

Итак, пусть (x_1, F_1) и $\mathcal{S}_1$ таковы, как указано выше. Прежде всего установим, что объединение $\mathcal{S}_1 \cup \{F_1\}$ связно.

Пусть y — произвольная вершина $\mathcal{S}_1$; заметим, что $y \neq x_1$, так как F_1 является единственным элементом $\mathcal{S}$, содержащим x_1 и $F_1 \notin \mathcal{S}_1$. В силу связности $\mathcal{S}$, в $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ существует путь, соединяющий y и x_1 . Следуя по этому пути от y и x_1 , обозначим через F элемент системы $\mathcal{S}$, который содержит первое ребро пути, не принадлежащее $\mathcal{S}_1$. (Так как x_1 не принадлежит $\mathcal{S}_1$, такое ребро заведомо существует.) Ясно, что $\mathcal{S}_1 \cup \{F\}$ — связная система. В силу свойства максимальнойности $\mathcal{S}_1$ мы должны иметь $F = F_1$, и, значит, система $\mathcal{S}_1 \cup \{F_1\}$ связная, как и утверждалось. Положим $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \setminus (\mathcal{S}_1 \cup \{F_1\})$. Система $\mathcal{S}'$ — непустая (возможно, несвязная). Согласно лемме 19.2, она имеет наружные вершины. При этом какая-то из её наружных вершин заведомо принадлежит F_1 . Действительно, в противном случае любой путь, соединяющий какую-нибудь вершину x системы $\mathcal{S}'$ с вершиной p , не принадлежащей $\mathcal{S}'$, должен был бы пройти и через какую-то вершину F_1 , а следовательно, в противоречие с теоремой 15.5, подграф графа $\mathcal{G}(p)$, порождённый $\text{ext } p \setminus \text{ext } F_1$, оказался бы несвязным¹. Пусть x_2 — некоторая наружная вершина $\mathcal{S}'$, не принадлежащая F_1 , и F_2 — тот единственный элемент $\mathcal{S}'$, который содержит x_2 . Тогда

¹ Здесь неявно предполагается, что $x \notin F_1$; такая вершина может быть выбрана среди вершин любой гиперграни, входящей в $\mathcal{S}'$. — Прим. ред.

x_2 будет наружной вершиной и в $\mathcal{S}$. Действительно, если бы это было не так, то x_2 должна была бы служить вершиной некоторого элемента F' системы $\mathcal{S}_1$, поскольку F_2 — единственный элемент $\mathcal{S}_1'$, содержащий x_2 , и x_2 не принадлежит F_1 ; но в таком случае оказалась бы связной система $\mathcal{S}_1 \cup \{F_2\}$, что противоречит свойству максимальности $\mathcal{S}_1$. Значит, вершина x_2 является наружной в $\mathcal{S}$, гипергрань F_2 — единственный элемент этой системы, содержащий x_2 , а $\mathcal{S}_1 \cup \{F_1\}$ — связная подсистема системы $\mathcal{S} \setminus \{F_2\}$, что и требовалось установить. $\square$

ЛЕММА 19.4. Пусть $\mathcal{S}$ — некоторая связная система гиперграней простого d -многогранника P . Предположим, что хотя бы одна из его вершин не принадлежит $\mathcal{S}$ и что $\mathcal{S}$ содержит по меньшей мере два элемента. Пусть (x_0, F_0) — пара из леммы 19.3. Тогда не менее $d-1$ вершин P являются внутренними в $\mathcal{S}$, но наружными в $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$.

Доказательство. В силу связности системы $\mathcal{S}$ в ней есть такой элемент F , что $F \neq F_0$ и $F \cap F_0 \neq \emptyset$. Тогда по теореме 12.14 грань $F \cap F_0$ имеет размерность $d-2$, а значит, у F и F_0 не меньше $d-1$ общих вершин. Как вершины сразу двух элементов из $\mathcal{S}$ все они являются внутренними в $\mathcal{S}$. Поэтому если все они — наружные в $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$, то мы получаем требуемое. Если же не все, то одна из них, скажем y , будет внутренней в $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$. В частности, $y \neq x_0$. Тогда по теореме 15.7 в $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ найдётся $d-1$ независимых путей, соединяющих x_0 и y . Проходя из x_0 в y по i -му пути, обозначим через x_i первую вершину, которая окажется в $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$. Предшествующее ей ребро $[u_i, x_i]$ не принадлежит $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$, а потому вершина x_i будет наружной в $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$. В частности, $x_i \neq x_0$ и $x_i \neq y$. Далее, так как $[u_i, x_i]$ не принадлежит системе $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$, то это ребро должно принадлежать гиперграну F_0 и, следовательно, x_i служит вершиной F_0 . Так как x_i является также и вершиной системы $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$, мы видим, что она принадлежит не менее чем двум элементам $\mathcal{S}$, а значит, служит внутренней вершиной системы $\mathcal{S}$. Таким образом, вершины $x_1, \dots, x_{d-1}$, общее число которых равно $d-1$, являются внутренними в $\mathcal{S}$, но наружными в $\mathcal{S} \setminus \{F_0\}$. $\square$

ЛЕММА 19.5. Пусть $\mathcal{Y}$ — некоторая система гиперграней простого d -многогранника P , такая что хотя бы одна вершина P ей не принадлежит. Тогда у P найдётся не менее d гиперграней, которые не принадлежат $\mathcal{Y}$, но каждая из которых содержит $(d-2)$ -грань, принадлежащую $\mathcal{Y}$.

Доказательство. Пусть x — вершина P , не принадлежащая $\mathcal{Y}$. Пусть, далее, Q — двойственный к P многогранник, лежащий в $\mathbb{R}^d$, и ψ — антиизоморфизм $(\mathcal{F}(P), \subset)$ на $(\mathcal{F}(Q), \subset)$. Запишем систему $\mathcal{Y}$ явно:

$$\mathcal{Y} = \{F_1, \dots, F_k\}.$$

По условию x не служит вершиной ни для одной из гиперграней F_i , значит, гипергрань

$\psi(\{x\})$ многогранника Q не содержит ни одной из вершин $\psi(F_i)$, $i = 1, \dots, m$ (теорема 9.8). Пусть z — какая-нибудь точка из $\mathbb{R}^d$, находящаяся вне Q , но "поблизости" от $\psi(\{x\})$ и такая, что каждая из вершин Q служит также и вершиной многогранника $Q' := \text{conv}(Q \cup \{z\})$. Тогда вершины Q' — это вершины Q плюс ещё z , а рёбра Q' — это рёбра Q и рёбра вида $[z, u]$, где $u \in \text{ext } \psi(\{x\})$. (Если мы допустим, что $\theta \in \text{int } P$, то в качестве Q' можно взять полярку многогранника, полученного срезкой вершины x многогранника P , см. § 11.) В силу теоремы 15.6 в $\mathcal{Y}(Q')$ найдутся d независимых путей, соединяющих вершины z и $\psi(F_i)$. Проходя от z к $\psi(F_1)$ по i -му из этих путей, обозначим через y_i ту из вершин, которая непосредственно предшествует первой из вершин, входящих в набор $\psi(F_1), \dots, \psi(F_k)$ и оказавшихся на этом пути. Тогда по двойственности $\psi^{-1}(\{y_1\}), \dots, \psi^{-1}(\{y_d\})$ суть d гиперграней многогранника P , не принадлежащих $\mathcal{Y}$, причём каждая из этих гиперграней имеет общую $(d-2)$ -грань с одним из элементов $\mathcal{Y}$. $\square$

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать теорему о минимальном числе граней:

Доказательство теоремы 19.1. Разобьём доказательство на четыре части. В части А будет доказано неравенство для $j=0$, а в части В — для $j=d-2$; здесь используются доказанные

выше леммы. В части С рассмотрены остальные значения d ; доказательство проводится по индукции. Наконец, в части D указаны многогранники, для которых имеет место равенство.

А. Выберем в многограннике P какую-нибудь вершину x и положим

$$\mathcal{Y} := \{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P) \mid x \notin F\}.$$

Тогда $\mathcal{Y}(P)$ есть подграф графа $\mathcal{Y}(P)$, порождённый $\text{ext } P \setminus \{x\}$, и, значит, по теореме 15.5, $\mathcal{Y}$ представляет собой связную систему гиперграней. Число элементов, входящих в $\mathcal{Y}$, равно $p-d$.

Из вершин P лишь одна, а именно x , не принадлежит $\mathcal{Y}$. Те d вершин P , которые смежны с x , являются наружными в $\mathcal{Y}$, и других наружных вершин у $\mathcal{Y}$ нет. Поэтому

число внутренних вершин $\mathcal{Y}$ равно $f_0(P) - (d+1)$.

Если $p = d+1$, то P представляет собой d -симплекс и доказываемое неравенство выполнено как равенство. Если $p \geq d+2$, то, последовательно применяя лемму 19.3, будем одну за другой удалять из $\mathcal{Y}$ гиперграней. В соответствии с леммой 19.4 при каждом таком удалении по меньшей мере $d-1$ вершин станут из внутренних наружными. После $p-d-1$ удалений мы придём к одноэлементной системе гиперграней. Общее число вершин, которые в ходе этого процесса изменили свой "статус", будет поэтому не меньше, чем

$$(p-d-1)(d-1).$$

Так как число внутренних вершин системы $\mathcal{Y}$ равно $f_0(P) - (d+1)$, мы заключаем, что

$$f_0(P) - (d+1) \geq (p-d-1)(d-1),$$

откуда

$$f_0(P) \geq (d-1)p - (d+1)(d-2),$$

что и требовалось установить.

В. Эту часть в свою очередь разобьём на два шага. Сначала мы установим, что если существует такая константа K , завися-

шая лишь от d , что

$$f_{d-2}(P) \geq d f_{d-1}(P) - K \quad (1)$$

для всех простых d -многогранников P , то должно выполняться и нужное нам неравенство

$$f_{d-2}(P) \geq d f_{d-1}(P) - (d^2 + d)/2. \quad (2)$$

После этого, на втором шаге, мы покажем, что (1) справедливо с $K = d^2 + d$.

Предположим, что неравенство (2) выполняется не всегда. Тогда в $\mathbb{R}^d$ найдётся простой d -многогранник P , такой что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$f_{d-2}(P) = d f_{d-1}(P) - (d^2 + d)/2 - \varepsilon.$$

Пусть Q — многогранник в $\mathbb{R}^d$, двойственный к P . Тогда Q представляет собой симплициальный d -многогранник, причём

$$f_1(Q) = d f_0(Q) - (d^2 + d)/2 - \varepsilon.$$

Ввиду теоремы 11.10 можно считать, что у Q есть такая гипергрань F , что ортогональная проекция $\mathbb{R}^d$ на гиперплоскость $\text{aff } F$ отображает $Q \setminus F$ в $\text{ri } F$. Пусть Q' обозначает многогранник, полученный отражением Q относительно гиперплоскости $\text{aff } F$. Тогда в силу указанного свойства гиперграни F объединение $Q_1 := Q \cup Q'$ вновь будет выпуклым d -многогранником, и ясно, что этот многогранник симплициален. Так как F имеет d вершин, то

$$f_0(Q_1) = 2 f_0(Q) - d,$$

а поскольку число рёбер F равно

$$\binom{d}{2} = (d^2 - d)/2,$$

то

$$f_1(Q_1) = 2f_1(Q) - (d^2 - d)/2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f_1(Q_1) &= 2(d f_0(Q) - (d^2 + d)/2 - \nu) - (d^2 - d)/2 \\ &= d f_0(Q_1) - (d^2 + d)/2 - 2\nu. \end{aligned}$$

Пусть P_1 — многогранник, двойственный к Q_1 . Это простой d -многогранник, причём

$$f_{d-2}(P_1) = d f_{d-2}(P) - (d^2 + d)/2 - 2\nu.$$

Отсюда видно, что для многогранника P_1 "отклонение" от оценки (2) составляет уже не ν , как для P , а 2ν . Продолжая эту конструкцию, мы приходим к выводу, что вообще никакое неравенство вида (1) не может быть выполнено сразу для всех простых d -многогранников, если только не имеет место (2). Первый шаг завершён.

Переходя ко второму шагу, рассмотрим произвольный простой d -многогранник P и положим $p := f_{d-1}(P)$. Пусть x и $\mathcal{Y}$ такие же, как и в части А. Если $p = d + 1$, то P есть d -симплекс и потому

$$\begin{aligned} f_{d-2}(P) &= \binom{d+1}{d-1} = d(d+1) - (d^2 + d)/2 \\ &= dp - (d^2 + d)/2 \\ &> dp - (d^2 + d), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Если же $p \geq d + 2$, то, последовательно применяя лемму 19.3, станем одну за другой удалять гиперграницы из системы $\mathcal{Y}$, как мы это делали в части А. Пусть F_i обозначает элемент $\mathcal{Y}$, который удаляется на i -м шаге, x_i — соответствующая наружная вершина системы $\mathcal{Y} \setminus \{F_1, \dots, F_{i-1}\}$, со-

держаться в F_i , а

$$\mathcal{S}_i := \{F_i \cap F_j \mid F_i \cap F_j \neq \emptyset, j = i+1, \dots, p\},$$

$$i = 1, \dots, p-d-1.$$

В соответствии с теоремой 12.14, $\mathcal{S}_i$ представляет собой систему гиперграней многогранника F_i .

Далее, будем говорить, что данная $(d-2)$ -грань G гиперграней F_i имеет тип 1 в F_i , если сама она не принадлежит $\mathcal{S}_i$, но некоторая её $(d-3)$ -грань принадлежит $\mathcal{S}_i$. Так как x_i есть вершина F_i , не входящая в $\mathcal{S}_i$, то к системе гиперграней $\mathcal{S}_i$ многогранника F_i может быть применена лемма 19.5, показывающая, что у F_i имеется по крайней мере $d-1$ $(d-2)$ -граней типа 1. Заметим, что $(d-2)$ -грань типа 1 в F_i не может служить гранью ни для какой гиперграней F_j с $j > i$.
Для $i = 1, \dots, p-d-1$ положим

$$q_i := \max \{j \mid i < j, F_i \cap F_j \neq \emptyset\}.$$

Тогда $G_i := F_i \cap F_{q_i}$ представляет собой $(d-2)$ -грань гиперграней F_i , и мы будем называть такие $(d-2)$ -грани гранями типа 2 в F_i . Заметим, что F_i и F_{q_i} — единственные гиперграней P , содержащие G_i (см. теорему 12.14), а также что G_i не имеет типа 1 в F_i , а в F_{q_i} не имеет ни типа 1, ни типа 2.

Проведённые выше рассуждения показывают, что при $i = 1, \dots, p-d-1$ количество тех $(d-2)$ -граней, которые составляют вклад от гиперграней F_i , не меньше чем d , а именно $d-1$ из них типа 1 и одна — типа 2. Поэтому общее число $(d-2)$ -граней у P не меньше чем

$$(p-d-1)d = dp - (d^2 + d),$$

что и требовалось доказать.

С. Теперь докажем индукцией по d , что наше неравенство верно и для остальных значений j , а именно для $j = 1, \dots, d-3$. Прежде всего заметим, что при $d = 3$ указанные значения просто отсутствуют, так что базис индукции у нас есть. Итак, пусть

$d \geq 4$, и пусть доказываемое неравенство выполнено для размерности $d-1$ и для $j = 1, \dots, (d-1)-3$. Пусть P — простой d -многогранник с p гипергранями и j принимает любое из значений $1, \dots, d-3$. Под j -инцидентностью будем понимать всякую пару вида (F, G) , где F — гипергрань P , а G — некоторая j -грань F . (Это понятие инцидентности отличается от того, которым мы пользовались в доказательстве теоремы о максимальном числе граней.) Ясно, что число j -инцидентностей равно

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} f_j(F).$$

Далее, поскольку каждая из j -граней P принадлежит в точности $d-j$ гиперграням, число j -инцидентностей равно также $(d-j)f_j(P)$. Значит,

$$(d-j)f_j(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} f_j(F). \quad (3)$$

Заметим, что для любой гипергранни F многогранника P

$$f_j(F) \geq \binom{d-1}{j+1} f_{d-2}(F) - \binom{d}{j+1} (d-2-j). \quad (4)$$

В самом деле, для $j = 1, \dots, d-4$ эта оценка вытекает из предположения индукции, применённого к F , а для $j = d-3$ — из результата части В, применённого к F . Объединяя (3) и (4), получаем

$$\begin{aligned} (d-j)f_j(P) &\geq \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \left(\binom{d-1}{j+1} f_{d-2}(F) - \binom{d}{j+1} (d-2-j) \right) \\ &= \binom{d-1}{j+1} \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} f_{d-2}(F) - \binom{d}{j+1} (d-2-j) \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} 1 \\ &= \binom{d-1}{j+1} \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} f_{d-2}(F) - \binom{d}{j+1} (d-2-j) p. \end{aligned}$$

Здесь

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} f_{d-2}(F) = 2f_{d-2}(P),$$

так как любая $(d-2)$ -грань P принадлежит в точности двум гиперграням. Значит,

$$(d-j)f_j(P) \geq \binom{d-1}{j+1} 2f_{d-2}(P) - \binom{d}{j+1} (d-2-j)p.$$

Применяя теперь к P результат части В, находим, что

$$(d-j)f_j(P) \geq \binom{d-1}{j+1} 2 \left(dp - \binom{d+1}{d-1} \right) - \binom{d}{j+1} (d-2-j)p.$$

Несложное вычисление показывает, что правая часть этой оценки равна

$$(d-j) \left(\binom{d}{j+1} p - \binom{d+1}{j+1} (d-1-j) \right).$$

Сокращая на общий множитель $(d-j)$, получаем нужную оценку.

Д. Легко видеть, что в случае, когда P есть d -симплекс, мы для всех j имеем равенство. Срезка одной вершины у простого d -многогранника P с p гипергранями даёт простой d -многогранник P' с $p+1$ гипергранями, имеющий на

$$\binom{d}{j+1}$$

больше j -граней, чем P , при $1 \leq j \leq d-2$ и на $d-1$ вершин больше, чем P (см. теорему 12.18). Легко видеть, что если для P мы имеем равенство, то и для P' тоже. Следовательно, нужные многогранники могут быть получены из d -симплекса путём последовательной срезки вершин. Тем самым доказательство теоремы 19.1 завершено. $\square$

Было бы желательно иметь более прямое доказательство теоремы о минимальном числе граней, чем данное выше (в частях А-С). Для начала можно было бы подумать, как дать прямое доказательство неравенства для $j=d-2$, заменяющее двухшаговое рассуждение, проведённое в части В. На втором шаге этого рассуждения мы доказали, что (1) выполнено с $K=d^2+d$. По сравнению с нужной оценкой "не хватает" $(d^2+d)/2$. Однако при

подсчёте числа $(d-2)$ -граней мы не учли те, которые содержат x ; их число равно

$$\binom{d}{d-2} = (d^2 - d)/2.$$

Это улучшение, хотя и не даёт нужной оценки, но всё же уменьшает "нехватку" до величины d .

В части $\mathbf{D}$ доказательства теоремы 19.1 мы установили, что равенство имеет место для многогранников усечения, т. е. многогранников, которые получаются из симплексов последовательной срезкой вершин. Для случая $d \geq 4$ известно, что если $f_j(P) = \varphi_j(d, p)$ хотя бы для одного значения j , то P обязан быть многогранником усечения. При $d=3$ ситуация иная. Как мы знаем, для всех простых 3-многогранников неравенства из формулировки теоремы 19.1 обращаются в равенства. С другой стороны, существуют простые 3-многогранники, не являющиеся многогранниками усечения, например параллелепипеды.

В § 18 было указано, что величина $\Phi_j(d, p)$ продолжает служить верхней границей числа j -граней и для непростых многогранников. Что же касается нижних границ, то для непростых многогранников пока мало что известно.

В двойственной форме теорема о минимальном числе граней может быть сформулирована следующим образом:

СЛЕДСТВИЕ 19.6. Для любого симплициального d -многогранника P с p вершинами

$$f_j(P) \geq \varphi_{d-1-j}(d, p), \quad j=1, \dots, d-1,$$

и существуют такие симплициальные d -многогранники P с p вершинами, для которых

$$f_j(P) = \varphi_{d-1-j}(d, p), \quad j=1, \dots, d-1.$$

Равенство здесь достигается для многогранников, двойственных к многогранникам усечения, и при $d \geq 4$ только для них. Это многогранники, получающиеся из симплексов путём последовательного

добавления пирамид над гипергранями; их называют многогранниками пирамидальной надстройки.

Интересно отметить, что оценки для минимального числа граней тесно связаны с неравенствами для величин $g_i(P)$, введённых в § 18. Подробнее об этом см. § 20.

§ 20. УСЛОВИЯ МАКМЮЛЛЕНА

Как было указано в начале § 16, пока неизвестен критерий, позволяющий выделять f -векторы d -многогранников среди произвольных наборов, состоящих из d натуральных чисел. Однако недавно была решена более узкая проблема характеристики f -векторов простых (или симплициальных) d -многогранников. В 1971 г. Макмюллен высказал гипотезу, что f -векторы симплициальных d -многогранников характеризуются некоторыми тремя условиями. В 1980 г. достаточность условий Макмюллена была доказана Биллерой и Ли, а их необходимость — Стэнли. Мы вкратце сообщим об этих фундаментальных результатах, но доказательства привести здесь не сможем. Как и в предыдущих параграфах, результаты формулируются для простых (а не симплициальных) многогранников.

Начнём с того, что введём некоторые обозначения. Для любого набора $f = (f_0, \dots, f_{d-1})$ из d натуральных чисел положим

$$g_i(f) := \sum_{j=0}^d (-1)^{i+j} \binom{d}{i} f_j, \quad i=0, \dots, d,$$

где всегда, по определению, $f_d = 1$. Заметим, что если f есть f -вектор некоторого простого d -многогранника P , то $g_i(f)$ совпадают с уже известными нам числами $g_i(P)$; см. утверждение (f) в доказательстве теоремы 18.1. При этом, как следует из рассуждений, которые привели нас к указанному утверждению,

$$f_j = \sum_{i=0}^d \binom{i}{j} g_i(f), \quad j=0, \dots, d. \quad (1)$$

Нам понадобятся ещё некоторые обозначения. Пусть h и k — натуральные числа. Как легко проверить индукцией по k , существуют однозначно определённые натуральные числа $z_0, z_1, \dots, z_q$, такие что

$$z_0 > z_1 > \dots > z_q \geq k - q \geq 1$$

и

$$h = \binom{z_0}{k} + \binom{z_1}{k-1} + \dots + \binom{z_q}{k-q}. \quad (2)$$

В самом деле, z_0 совпадает с наибольшим целым, для которого

$$h \geq \binom{z_0}{k}, \quad (3)$$

z_1 — с наибольшим целым, для которого

$$h - \binom{z_0}{k} \geq \binom{z_1}{k-1}$$

(если только в (3) уже не выполнено равенство, в этом случае $q = 0$), и т.д. Представление (2) называется каноническим k -представлением числа h .

Имея каноническое k -представление (2) числа h , определяем k -ю псевдостепень $h^{(k)}$ этого числа формулой

$$h^{(k)} := \binom{z_0+1}{k+1} + \binom{z_1+1}{k} + \dots + \binom{z_q+1}{k-q+1}. \quad (4)$$

Заметим, что (4) представляет собой каноническое $(k+1)$ -представление числа $h^{(k)}$. Как легко видеть, k -я псевдостепень монотонна:

$$h_1 < h_2 \Rightarrow h_1^{(k)} < h_2^{(k)}.$$

Распространим определение $h^{(k)}$ на $h = 0$, положив

$$0^{(k)} := 0.$$

Теперь мы можем дать упомянутую выше, характеристику; напомним

ним, что $m := \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ и $n := \lfloor d/2 \rfloor$. Приводимые ниже условия (а) — (с) называются условиями Макмюллена.

ТЕОРЕМА 20.1. Набор $f = (f_0, \dots, f_{d-1})$ из d натуральных чисел тогда и только тогда служит f -вектором простого d -многогранника, когда выполнены следующие три условия:

- (а) $g_i(f) = g_{d-i}(f)$ для $i = 0, \dots, m$;
 (б) $g_i(f) \leq g_{i+1}(f)$ для $i = 0, \dots, n-1$;
 (с) $g_{i+1}(f) - g_i(f) \leq (g_i(f) - g_{i-1}(f))^{(i)}$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Из предыдущих параграфов мы знаем, что для f -векторов простых многогранников справедливы уравнения Дена — Соммервилля и неравенства, фигурирующие в теоремах о максимальном и минимальном числе граней. Поэтому из теоремы 20.1 вытекает следующее утверждение: если для некоторого $f = (f_0, \dots, f_{d-1})$ выполнены условия (а) — (с), то для этого f выполнены также уравнения Дена — Соммервилля и указанные выше неравенства. Сейчас мы дадим прямое доказательство этого утверждения. (Тем самым читатель сможет получить некоторое представление о роли условий (а) — (с).)

Прежде всего заметим, что в силу определения чисел $g_i(f)$ условие (а) эквивалентно тому, что набор $(f_0, \dots, f_{d-1})$ удовлетворяет системе Дена — Соммервилля из теоремы 17.5, а это в свою очередь эквивалентно тому, что $(f_0, \dots, f_{d-1})$ удовлетворяет уравнениям Дена — Соммервилля.

Переходя к выводу неравенств из теорем о максимальном и минимальном числе граней заметим, что

$$g_d(f) = 1$$

и

$$g_{d-1}(f) = f_{d-1} - d,$$

а значит, в силу (а),

$$g_0(f) = 1$$

и

$$g_1(f) = f_{d-1} - d.$$

Начнём с неравенств из теоремы о минимальном числе граней.

В силу (а) и (b)

$$g_1(f) \leq g_i(f), \quad i = 1, \dots, d-1. \quad (5)$$

Используя (1), (5) и сделанное выше замечание, получаем

$$f_0 = \sum_{i=0}^d \binom{i}{0} g_i(f) = g_0(f) + \sum_{i=0}^{d-1} g_i(f) + g_d(f)$$

$$\geq g_0(f) + (d-1)g_1(f) + g_d(f)$$

$$= 1 + (d-1)(f_{d-1} - d) + 1$$

$$= (d-1)f_{d-1} - (d+1)(d-2),$$

как и требуется. Аналогичным образом, при $j = 1, \dots, d-2$ имеем

$$f_j = \sum_{i=0}^d \binom{i}{j} g_i(f) = \sum_{i=j}^{d-1} \binom{i}{j} g_i(f) + \binom{d}{j} g_d(f)$$

$$\geq \sum_{i=j}^{d-1} \binom{i}{j} g_1(f) + \binom{d}{j} g_d(f) = (f_{d-1} - d) \sum_{i=j}^{d-1} \binom{i}{j} + \binom{d}{j}.$$

Но ввиду соотношения (9) из добавления 3

$$\sum_{i=j}^{d-1} \binom{i}{j} = \sum_{k=0}^{d-1-j} \binom{j+k}{j}$$

$$= \binom{j+(d-1-j)+1}{d-1-j} = \binom{d}{j+1},$$

откуда

$$f_j \geq (f_{d-1} - d) \binom{d}{j+1} + \binom{d}{j}$$

$$= \binom{d}{j+1} f_{d-1} - \binom{d+1}{j+1} (d-1-j),$$

как и требуется. Итак, неравенства из теоремы о минимальном числе граней получены.

Что касается неравенств из теоремы о максимальном числе граней, то покажем сначала, что

$$(g_i(f) - g_{i-1}(f))^{(i)} \leq \binom{f_{d-1} - d + i - 1}{i+1}, \quad i=1, \dots, n-1. \quad (6)$$

Для $i=1$ имеем

$$g_1(f) - g_0(f) = f_{d-1} - d - 1.$$

Каноническое 1-представление числа $f_{d-1} - d - 1$ выглядит, разумеется, так:

$$f_{d-1} - d - 1 = \binom{f_{d-1} - d - 1}{1}.$$

Значит,

$$(g_1(f) - g_0(f))^{(1)} = \binom{f_{d-1} - d}{2},$$

чем неравенство (6) доказано для $i=1$. Чтобы доказать его в общем случае, проведём индукцию по i . Предположим, что (6) выполнено для некоторого i . Используя (с) и свойство монотонности псевдостепени, получаем

$$\begin{aligned} (g_{i+1}(f) - g_i(f))^{(i+1)} &\leq ((g_i(f) - g_{i-1}(f))^{(i)})^{(i+1)} \\ &\leq \binom{f_{d-1} - d + i - 1}{i+1}^{(i+1)} \end{aligned}$$

Чтобы найти $(i+1)$ -ю псевдостепень числа

$$\binom{f_{d-1} - d + i - 1}{i+1},$$

нам требуется его каноническое $(i+1)$ -представление. Оно, конечно, таково (!):

$$\binom{f_{d-1} - d + i - 1}{i+1} = \binom{f_{d-1} - d + i - 1}{i+1}.$$

Следовательно,

$$\binom{f_{d-1-d+i-1}}{i+1}^{<i+1>} = \binom{f_{d-1-d+i}}{i+2},$$

чем и доказано, что (6) выполнено для $i+1$.

Теперь, используя (6), покажем, что

$$g_i(f) \leq \binom{f_{d-1-d+i-1}}{i}, \quad i=0, \dots, n. \quad (7)$$

Конечно, при $i=0, 1$ это соотношение выполнено, причём со знаком равенства. Для общего случая докажем его по индукции. Предполагая, что оно выполнено для данного i , в силу (с) и (6) имеем

$$\begin{aligned} g_{i+1}(f) &\leq g_i(f) + (g_i(f) - g_{i-1}(f))^{<i>} \\ &\leq \binom{f_{d-1-d+i-1}}{i} + \binom{f_{d-1-d+i-1}}{i+1} \\ &= \binom{f_{d-1-d+i}}{i+1}, \end{aligned}$$

как и утверждалось.

Завершая доказательство, заметим, что в силу (1) и (а)

$$f_j = \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} g_i(f) + \sum_{i=0}^m \binom{d-i}{j} g_i(f)$$

для $j=0, \dots, d$. Отсюда и из (7) вытекает, что

$$f_j \leq \sum_{i=0}^n \binom{i}{j} \binom{f_{d-1-d+i-1}}{i} + \sum_{i=0}^m \binom{d-i}{j} \binom{f_{d-1-d+i-1}}{i}$$

для $j=0, \dots, d$. Требуемые неравенства получены.

ДОБАВЛЕНИЕ 1

Решётки

Отношение $\leq$ на непустом множестве M называется частичным порядком, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, т.е.

$$x \leq x,$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

и

$$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

для всех $x, y, z \in M$. Частично упорядоченное множество — это пара $(M, \leq)$, где M — непустое множество, а $\leq$ — частичный порядок на M .

Ниже $(M, \leq)$ — частично упорядоченное множество и N — некоторое подмножество в M . Элемент $x \in M$ называется нижней гранью множества N , если $x \leq y$ для всех $y \in N$. Аналогично x называется верхней гранью N , если $y \leq x$ для всех $y \in N$. Элемент $x \in M$ называется точной нижней гранью N , если x есть нижняя грань N и при этом $z \leq x$ для любой другой нижней грани z . Точная нижняя грань N единственна, если существует; она обозначается $\inf N$. Аналогично x называется точной верхней гранью N , если x есть верхняя N и $x \leq z$ для любой другой верхней грани z . Точная верхняя грань единственна, если существует; она обозначается $\sup N$.

Частично упорядоченное множество $(M, \leq)$ называется решёткой, если $\inf N$ и $\sup N$ существуют для любого непустого конечного подмножества N в M . Если $\inf N$ и $\sup N$

существуют для любого подмножества $\mathcal{N}$ множества M , то решётка $(M, \leq)$ называется полной.

Всякая конечная решётка полна.

Если $(M, \leq)$ – такое частично упорядоченное множество, что $\inf \mathcal{N}$ существует для всех подмножеств $\mathcal{N}$ множества M , то на самом деле $(M, \leq)$ есть полная решётка. То же самое относится и к $\sup \mathcal{N}$.

Пусть $(M, \leq)$ – некоторая решётка и M' – непустое подмножество в M . Частичный порядок $\leq$ на M порождает частичный порядок на M' , который мы опять обозначим $\leq$. Будем говорить, что частично упорядоченное множество $(M', \leq)$ есть подрешётка решётки $(M, \leq)$, если $\inf \mathcal{N} \in M'$ и $\sup \mathcal{N} \in M'$ для каждого непустого конечного подмножества $\mathcal{N}$ в M' . (Здесь $\inf \mathcal{N}$ и $\sup \mathcal{N}$ обозначают, конечно, точную нижнюю и точную верхнюю грани $\mathcal{N}$ в $(M, \leq)$.) В этом случае $(M', \leq)$ тоже является решёткой. Отметим, что в определении подрешётки мы налагаем требование более жёсткое, чем требование, чтобы частично упорядоченное множество $(M', \leq)$ было решёткой.

Отображение φ из одной решётки $(M_1, \leq)$ на другую решётку $(M_2, \leq)$ называется изоморфизмом, если оно взаимно-однозначно и $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ ($x, y \in M_1$). Если существует изоморфизм из $(M_1, \leq)$ на $(M_2, \leq)$, то мы говорим, что $(M_1, \leq)$ и $(M_2, \leq)$ изоморфны. Отображение ψ из $(M_1, \leq)$ на $(M_2, \leq)$ называется антиизоморфизмом, если оно взаимно-однозначно и $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $\psi(y) \leq \psi(x)$ ($x, y \in M_1$). Если существует антиизоморфизм из $(M_1, \leq)$ на $(M_2, \leq)$, то мы говорим, что $(M_1, \leq)$ и $(M_2, \leq)$ антиизоморфны.

Заметим, что изоморфизм φ сохраняет $\inf$ и $\sup$, т.е. $\varphi(\inf \mathcal{N}) = \inf \varphi(\mathcal{N})$, $\varphi(\sup \mathcal{N}) = \sup \varphi(\mathcal{N})$, а антиизоморфизм ψ "обращает" $\inf$ и $\sup$, т.е. $\psi(\inf \mathcal{N}) = \sup \psi(\mathcal{N})$ и $\psi(\sup \mathcal{N}) = \inf \psi(\mathcal{N})$.

ДОБАВЛЕНИЕ 2

Графы

На интуитивном уровне граф (неориентированный) – это конечное множество "вершин" и конечное множество "рёбер", причём каждое ребро "соединяет" две различные вершины и любые две различные вершины соединены не более чем одним ребром. Формально это можно выразить так: (неориентированный) граф – это тройка $\Gamma = (V, E, \gamma)$, где V – непустое конечное множество (называемое множеством вершин Γ), E – некоторое (необходимо конечное) множество (называемое множеством рёбер Γ) и γ – взаимно-однозначное отображение (называемое отношением инцидентности для Γ) из E на некоторое подмножество множества всех множеств $\{x, y\}$, состоящих из двух различных элементов множества V .

Если x и y – две различные вершины графа $\Gamma = (V, E, \gamma)$, а e – такое его ребро, что $\gamma(e) = \{x, y\}$, то говорят, что e соединяет x и y , что x и y суть концевые вершины e , что x и y инцидентны e , а e инцидентно x и y . Если x и y – две вершины Γ , соединённые ребром, то говорят, что x и y смежны. Число рёбер, инцидентных с некоторой вершиной x , т. е. число вершин, смежных с x , называется валентностью x .

Путь в графе Γ – это последовательность вида

$$x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, e_{n-1}, x_n,$$

где x_i – вершины Γ , а e_i – рёбра Γ , такие что для каждого i ребро e_i соединяет x_i и x_{i+1} . Про такой путь говорят, что он соединяет x_1 и x_n , и x_1, x_n называются концевыми вершинами пути. По техническим соображениям мы допускаем значение $n=1$, т. е. включаем в рассмотрение и тривиальные пути, состоящие из одной вершины без рёбер. Про пути из некоторого

набора путей, соединяющих две вершины x и y , говорят, что они независимы, если для любых двух путей из этого набора единственными их общими вершинами служат x и y .

Будем говорить, что две не смежные вершины x и y данного графа разделяются некоторым множеством его вершин W , если каждый путь, соединяющий x и y , обязательно содержит вершину из W .

Граф называется связным, если любые две его различные вершины могут быть соединены некоторым путём. Несвязный граф — это граф, не являющийся связным. Говорят, что граф k -связен (где k — натуральное число), если у него не менее $k+1$ вершин, и любые две различные из этих вершин могут быть соединены не менее чем k независимыми путями. (Если отвлечься от тривиальных графов с одной-единственной вершиной, то 1-связность, или односвязность, равносильна связности.)

Подграфом данного графа $\Gamma = (V, E, \gamma)$ называют всякий граф $\Gamma' = (V', E', \gamma')$, такой что $V' \subset V$, $E' \subset E$ и $\gamma'(e) = \gamma(e)$ для $e \in E'$. В общем случае каждое непустое подмножество V' множества вершин V графа Γ служит множеством вершин сразу нескольких подграфов Γ : любое подмножество E' множества рёбер E графа Γ , обладающее тем свойством, что оно содержит лишь рёбра Γ , соединяющие вершины из V' , будет множеством рёбер некоторого подграфа с множеством вершин V' . Если E' содержит все рёбра Γ , которые соединяют вершины из V' , то получающийся подграф называется подграфом, порождённым V' .

Данное множество вершин W графа $\Gamma = (V, E, \gamma)$ разделяет (в описанном выше смысле) некоторые две его несмежные вершины x и y тогда и только тогда, когда подграф графа Γ , порождённый $V \setminus W$, является несвязным.

Всякий путь в данном графе Γ может рассматриваться как его подграф. Вообще говоря, он отличен от подграфа, порождённого множеством его вершин.

Пусть $\Gamma_i = (V_i, E_i, \gamma_i)$, $i=1, \dots, n$, — подграфы некоторого графа $\Gamma = (V, E, \gamma)$. Положим

$$V' := \bigcup_{i=1}^n V_i, \quad E' := \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad \gamma'(e) := \gamma(e), \quad e \in E'.$$

Тогда $\Gamma' = (V', E', \rho')$ есть подграф графа Γ ; его называют объединением подграфов Γ_i и обозначают $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$.

В основном тексте используются следующие два важных результата, касающиеся связности.

ТЕОРЕМА Д2.1. Граф $\Gamma = (V, E, \rho)$, содержащий не менее $k + 1$ вершин, тогда и только тогда k -связен, когда для любых $k - 1$ его вершин $x_1, \dots, x_{k-1}$ подграф Γ' графа Γ , порождённый

$$V' := V \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\},$$

является связным.

ТЕОРЕМА Д2.2. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два k -связных подграфа графа Γ . Если Γ_1 и Γ_2 имеют не менее k общих вершин, то их объединение $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ также k -связно.

Доказательство этих двух теорем будет дано ниже. Теорема Д2.2 представляет собой лёгкое следствие теоремы Д2.1. Основная трудность, с которой мы сталкиваемся при доказательстве теоремы Д2.1, преодолевается в следующей лемме:

ЛЕММА Д2.3. Пусть x и y — несмежные вершины графа Γ . Если число вершин Γ , которые нужны для того, чтобы разделить x и y , равно k , то в Γ найдётся k независимых путей, соединяющих x и y .

Доказательство. Очевидно, что для $k = 1$ утверждение верно. Допустим, что оно выполнено не для всех k , и обозначим через k_0 наименьшее значение k , для которого оно ложно. Пусть Γ_0 — граф с наименьшим числом вершин, такой что для соответствующих несмежных его вершин x_0 и y_0 число тех вершин, которые нужны для разделения x_0 и y_0 , равно k_0 , в то время как максимальное число независимых путей, соединяющих x_0 и y_0 , не больше $k_0 - 1$. Удаляя, если надо, из Γ_0 "лишние" рёбра, мы можем дополнительно считать, что любой граф Γ'_0 , полученный из Γ_0 удалением одного ребра, обладает тем свойством, что для разделения x_0 и y_0 в Γ'_0 достаточно $k_0 - 1$ вершин.

Докажем сначала, что

(а) ни одна из вершин Γ_0 не является смежной одновременно и с x_0 , и с y_0 .

Допустим, что некоторая вершина v смежна и с x_0 , и с y_0 . Обозначим через $\Gamma(v)$ подграф графа Γ_0 , порождённый всеми вершинами Γ_0 , за исключением v . Ясно, что требуется $k_0 - 1$ вершин, чтобы разделить x_0 и y_0 в $\Gamma(v)$. Ввиду свойства минимальности k_0 , в $\Gamma(v)$ найдутся $k_0 - 1$ независимых путей, соединяющих x_0 и y_0 . Вместе с тем путем, у которого вершинами служат x_0, v и y_0 , общее число независимых путей в Γ_0 , соединяющих x_0 и y_0 , достигает тогда k , т. е. мы пришли к противоречию.

Теперь докажем, что

(б) каково бы ни было множество W , состоящее из k_0 вершин Γ_0 и разделяющее x_0 и y_0 , либо каждая из вершин, входящих в W , смежна с x_0 , либо каждая из них смежна с y_0 .

Если бы для некоторой вершины $v \in W$ любой путь, соединяющий x_0 и y_0 и проходящий через v , содержал хотя бы ещё одну вершину из W , то тогда уже $W \setminus \{v\}$ разделяло бы x_0 и y_0 , т. е. мы получили бы противоречие. Поэтому для любой вершины $v \in W$ существует по крайней мере один путь, соединяющий x_0 и y_0 , такой что v — единственная из вершин W на этом пути. Объединение всех таких путей представляет собой подграф графа Γ_0 . Добавляя к этому подграфу вершину y_0 и k_0 "новых" ребер, каждое из которых соединяет y_0 с некоторой вершиной из W , получим некоторый новый граф. Обозначим его $\Gamma(x_0)$. Меняя ролями x_0 и y_0 , аналогичным образом получим ещё один граф $\Gamma(y_0)$. Заметим, что и $\Gamma(x_0)$, и $\Gamma(y_0)$ обладают тем свойством, что в них для разделения x_0 и y_0 нужно k_0 вершин; в самом деле, любое множество, разделяющее эти точки в $\Gamma(x_0)$ или $\Gamma(y_0)$, должно разделять их и в Γ_0 . Допуская, что ни x_0 , ни y_0 не являются смежными со всеми вершинами из W , приходим к выводу, что и $\Gamma(x_0)$, и $\Gamma(y_0)$ имеют меньше вершин, чем Γ_0 . Ввиду свойства минимальности Γ_0 , как в $\Gamma(x_0)$, так и в $\Gamma(y_0)$ найдутся k_0 независимых путей, соединяющих x_0 и y_0 . Удаляя из путей в $\Gamma(x_0)$ вершину y_0 и ("новое") ребро, инцидентное с y_0 , мы получим k_0 путей в Γ_0 , каждый из которых соединяет x_0 с некоторой вершиной W , причём ни одна из вершин, кроме x_0 , не принад-

лежит более чем одному пути. Подобным же образом, удаляя из путей в $\Gamma(y_0)$ вершину x_0 и ("новое") ребро, инцидентное с x_0 , получим k_0 путей в Γ_0 , каждый из которых соединяет y_0 с некоторой вершиной W , причём ни одна вершина, кроме y_0 , не принадлежит более чем одному пути. Далее, эти $2k_0$ путей группируются в пары, в которых пути имеют некоторую общую вершину из W . Каждая такая пара определяет путь, соединяющий x_0 и y_0 . Получающиеся k_0 путей, соединяющих x_0 и y_0 , оказываются независимыми. Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что любая вершина из W принадлежит в точности одному из путей. Однако и для вершин не из W тоже исключена возможность принадлежать сразу двум путям. В самом деле, допустим, что x — такая вершина, общая для двух путей p_1 и p_2 . Тогда, в силу независимости первых k_0 путей в $\Gamma(x_0)$ и независимости вторых k_0 путей в $\Gamma(y_0)$, эта вершина должна была бы лежать между x_0 и некоторой вершиной $v_1 \in W$ на одном из наших путей, скажем на p_1 , и между y_0 и некоторой вершиной $v_2 \in W$ на другом пути p_2 . Но тогда мы смогли бы построить проходящий через x путь, который соединяет x_0 и y_0 , минуя W , что невозможно.

Чтобы закончить доказательство леммы, рассмотрим произвольный путь

$$x_0, e_0, u_1, e_1, u_2, \dots, u_n, e_n, y_0 \quad (1)$$

в Γ_0 , соединяющий x_0 и y_0 . В силу утверждения (а) и не смежности x_0 и y_0 мы должны иметь $n \geq 2$. Обозначим через Γ'_0 подграф графа Γ_0 , полученный из Γ_0 удалением ребра e_1 . Согласно одному из наших исходных предположений, для разделения x_0 и y_0 в Γ'_0 достаточно $k_0 - 1$ вершин. Пусть W' — такое разделяющее множество вершин из Γ'_0 . Тогда ясно, что как

$$W'_1 := W' \cup \{u_1\},$$

так и

$$W'_2 := W' \cup \{u_2\}$$

разделяют x_0 и y_0 в Γ_0 . Из (а) вытекает, что вершина u_1 несмежна с y_0 , а вершина u_2 несмежна с x_0 ¹. Тогда применение утверждения (b) к W_1' показывает, что каждая вершина в W' является смежной с x_0 , а применение его к W_2' — что каждая вершина в W' смежна с y_0 . Так как число вершин в W' равно $k_0 - 1$, что не меньше 1, то, вновь обращаясь к (а), приходим к противоречию. Этим доказательство леммы завершено. $\square$

Доказательство теоремы Д2.1. Сначала предположим, что граф Γ является k -связным. Пусть $x_1, \dots, x_{k-1}$ — произвольные $k-1$ его вершин, и пусть x и y — произвольные две вершины из множества

$$V' := V \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}.$$

По предположению, x и y могут быть соединены k независимыми путями в Γ . Ни одна из вершин $x_1, \dots, x_{k-1}$ не принадлежит более чем одному из этих путей, в силу их независимости. Поэтому по меньшей мере один из путей не проходит ни через одну из вершин x_i . Это показывает, что в подграфе Γ' , порождённом V' , есть путь, соединяющий x и y . Значит, подграф Γ' связан.

Докажем обратное утверждение. Пусть x и y — какие-нибудь две различные вершины Γ . Если они не смежны, то, в силу сделанного предположения, чтобы их разделить, требуется не менее k вершин. Поэтому лемма Д2.3 показывает, что существует не менее k независимых путей, соединяющих x и y , что и требовалось установить. Если же x и y смежны, то рассуждаем следующим образом. Удалим из Γ ребро e , соединяющее x и y , и обозначим получившийся граф через Γ'' . В Γ'' вершины x и y не смежны. Допустим, что нашлись $k-2$ вершин $x_1, \dots, x_{k-2}$, разделяющие x и y в Γ'' . В Γ'' есть по крайней мере ещё одна вершина z . Так как x и y разделены указанным множеством вершин, оно должно отделять z по крайней мере от одной из вершин x, y скажем от y . Но тогда $k-1$ вершин $x_1, \dots, x_{k-2}, x$ разделяют y и z , что вопреки нашему предположению. Зна-

¹ "Укорачивая", если надо, путь (1), можно считать, что вершина x_0 несмежна с u_2 . — Прим. ред.

чит, в Γ'' требуется не менее $k-1$ вершин, чтобы разделить x и y . В таком случае, как это вытекает из леммы Д2.3, в Γ'' найдётся $k-1$ независимых путей, соединяющих x и y . Вместе с путем x, e, y это даёт в общей сложности k независимых путей в Γ , соединяющих x и y . $\square$

Доказательство теоремы Д2.2. Воспользуемся теоремой Д2.1.

Пусть $x_1, \dots, x_{k-1}$ — произвольные $k-1$ вершин графа $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, т. е. $x_1, \dots, x_{k-1}$ принадлежат $V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 обозначают множества вершин Γ_1 и Γ_2 соответственно. Положим

$$V' := (V_1 \cup V_2) \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\},$$

и пусть Γ' обозначает подграф в $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, порождённый V' . Так как у Γ_1 и Γ_2 не менее k общих вершин, то по крайней мере одна из них, скажем x_0 , отличается от всех $x_i, i=1, \dots, k-1$. Применение утверждения о необходимости из теоремы Д2.1 к Γ_1 показывает, что подграф Γ_1' графа Γ_1 , порождённый

$$V_1' := V_1 \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\},$$

связен. Аналогичным образом связан и подграф Γ_2' графа Γ_2 , порождённый

$$V_2' := V_2 \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}.$$

Но Γ_1' и Γ_2' имеют x_0 общей вершиной. Следовательно, объединение $\Gamma_1' \cup \Gamma_2'$ связно. Так как $\Gamma_1' \cup \Gamma_2' = \Gamma'$, то требуемый вывод следует из утверждения о достаточности из теоремы Д2.1. $\square$

Наконец, скажем несколько слов об ориентированных графах. На интуитивном уровне ориентированный граф — это (неориентированный) граф, как он описан выше, в котором к тому же каждое ребро наделено некоторой "ориентацией". Формально это можно выразить следующим образом: ориентированный граф есть тройка $\Gamma = (V, E, \delta)$, где V — непустое конечное множество (называемое множеством вершин Γ), E — некоторое (необходимо конечное) множество (называемое множеством рёбер Γ) и δ — взаимно-однозначное отображение (называемое отношением инцидентности для Γ) из E на

некоторое подмножество множества всех упорядоченных пар (x, y) , состоящих из различных между собой элементов V ; при этом требуется, чтобы выполнялось такое условие: если x и y — различные вершины и $f(e) = (x, y)$ для некоторого ребра e , то $f(e') \neq (y, x)$ для всех рёбер e' .

"Основой" всякого ориентированного графа $\Gamma = (V, E, f)$ служит неориентированный граф $\Gamma' = (V, E, f')$, где $f'(e) = \{x, y\}$, если $f(e) = (x, y)$ или $f(e) = (y, x)$. Поэтому всё, что было сказано выше о неориентированных графах, относится и к графам ориентированным, поскольку применимо к их "основам".

Если $\Gamma = (V, E, f)$ — ориентированный граф и $f(e) = (x, y)$, то мы говорим, что ребро e направлено от x к y . Число тех рёбер, которые направлены к x , называется валентностью входа, а число рёбер, направленных от x , — валентностью выхода (для) вершины x . Ясно, что сумма валентности входа и валентности выхода данной вершины равна её валентности.

Любой неориентированный граф можно превратить в ориентированный, выбрав для каждого из его рёбер одну из двух возможных ориентаций. Формально это означает, что если $\Gamma = (V, E, f)$ — неориентированный граф, то, выбирая f' , такое что $f'(e) = (x, y)$ или $f'(e) = (y, x)$, когда $f(e) = \{x, y\}$, мы получим ориентированный граф $\Gamma' = (V, E, f')$. Конечно, f' не единственно (за исключением случая, когда Γ вообще не имеет рёбер).

ДОБАВЛЕНИЕ 3

Комбинаторные тождества

В основном тексте используются некоторые тождества для биномиальных коэффициентов. Цель данного добавления — дать единое изложение этих тождеств.

Всюду ниже a, b и c обозначают целые числа. Далее, мы везде считаем, что $b \geq 0$, в то время как a и c могут быть и отрицательными.

Напомним, что

$$\binom{a}{b} := \frac{a(a-1)\dots(a-b+1)}{b!}, \quad b \geq 1,$$

и

$$\binom{a}{0} := 1.$$

В частности,

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}, \quad b \leq a,$$

и

$$\binom{a}{b} = 0, \quad 0 \leq a < b.$$

При $a \geq 0$

$$\binom{a}{b}$$

равно числу способов выбрать b элементов из набора, содержащего a элементов.

Предоставляем читателю проверку следующих соотношений:

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}. \quad (1)$$

$$\binom{a}{b} = \binom{-a+b-1}{b} (-1)^b. \quad (2)$$

$$\binom{a}{b} = \binom{-b-1}{a-b} (-1)^{a-b}. \quad (3)$$

$$\binom{a+1}{b+1} = \frac{a+1}{b+1} \binom{a}{b}. \quad (4)$$

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b}. \quad (5)$$

$$\binom{a}{b} \binom{c}{a} = \binom{c}{b} \binom{c-b}{a-b} \quad (6)$$

(в (1), (3) и (6) предполагается, что $a \geq b$).

Все комбинаторные тождества, используемые в основном тексте, являются следствиями одного основного, известного как тождество Вандермонда:

$$\sum_{k=0}^b \binom{a}{k} \binom{c}{b-k} = \binom{a+c}{b} \quad (7)$$

(сумму в левой части называют, свёрткой Вандермонда). Это соотношение легко доказывается при $a, c \geq 0$. В самом деле,

есть число способов выбрать b элементов из $a+c$ при условии, что k элементов выбираются из числа заданных a элементов, а остальные $b-k$ элементов — среди оставшихся c элементов; ясно, что суммирование по k даёт (7). Нам, однако, нужно соотношение (7) для произвольных целых a и c . Докажем его индукцией по b . Для $b=0$ оно очевидно. Допустим, что оно уже доказано для некоторого b . Тогда, используя также и (4), мы имеем

$$\sum_{k=0}^{b+1} \binom{a}{k} \binom{c}{b+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{b+1} \left(\frac{k}{b+1} + \frac{b+1-k}{b+1} \right) \binom{a}{k} \binom{c}{b+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{b+1} \frac{k}{b+1} \binom{a}{k} \binom{c}{b+1-k} + \sum_{k=0}^b \frac{b+1-k}{b+1} \binom{a}{k} \binom{c}{b+1-k}$$

$$= \sum_{h=0}^b \frac{h+1}{b+1} \binom{a}{h+1} \binom{c}{b+1-(h+1)} + \sum_{k=0}^b \frac{b+1-k}{b+1} \binom{a}{k} \binom{c}{b+1-k}$$

$$= \sum_{h=0}^b \frac{a}{b+1} \binom{a-1}{h} \binom{c}{b-h} + \sum_{k=0}^b \frac{c}{b+1} \binom{a}{k} \binom{c-1}{b-k}$$

$$= \frac{a}{b+1} \binom{(a-1)+c}{b} + \frac{c}{b+1} \binom{a+(c-1)}{b}$$

$$= \frac{a+c}{b+1} \binom{a+c-1}{b} = \binom{a+c}{b+1}.$$

Значит, (7) выполнено для $b+1$, и всё доказано.

Полагая в (7) $c = -1$ и используя тот факт, что, в силу данного определения,

$$\binom{-1}{b-k} = (-1)^{b-k},$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^b (-1)^k \binom{a}{k} &= (-1)^b \binom{a-1}{b} \\ &= \binom{b-a}{b}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как

$$\binom{a+k}{k} = (-1)^k \binom{-a-1}{k},$$

(см. (2)), то (8) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^b \binom{a+k}{k} &= (-1)^b \binom{-a-2}{b} \\ &= \binom{a+b+1}{b}. \end{aligned} \quad (9)$$

Докажем теперь, что

$$\sum_{k=0}^b (-1)^k \binom{k}{a} \binom{c}{k} = (-1)^b \binom{c}{a} \binom{c-a-1}{b-a}, \quad 0 \leq a \leq b. \quad (10)$$

Для этого воспользуемся (6) и (8). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^b (-1)^k \binom{k}{a} \binom{c}{k} &= \sum_{k=a}^b (-1)^k \binom{k}{a} \binom{c}{k} \\ &= \sum_{k=a}^b (-1)^k \binom{c}{a} \binom{c-a}{k-a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^a \binom{c}{a} \sum_{h=0}^{b-a} (-1)^h \binom{c-a}{h} \\
&= (-1)^a \binom{c}{a} (-1)^{b-a} \binom{c-a-1}{b-a} \\
&= (-1)^b \binom{c}{a} \binom{c-a-1}{b-a},
\end{aligned}$$

чем (10) и доказано.

Из (10), в частности, следует, что

$$\sum_{k=0}^b (-1)^k \binom{k}{a} \binom{c}{k} = (-1)^a \delta(a, c), \quad 0 \leq a \leq b, \quad 0 \leq c \leq b. \quad (11)$$

В самом деле, если $a = c$, то

$$(-1)^b \binom{c}{a} \binom{c-a-1}{b-a} = (-1)^b \cdot 1 \cdot \binom{-1}{b-a} = (-1)^b (-1)^{b-a} = (-1)^a,$$

если $a > c$, то

$$\binom{c}{a} = 0,$$

если же $a < c$, то $0 \leq c-a-1 < b-a$ и, значит,

$$\binom{c-a-1}{b-a} = 0.$$

Тем самым (11) доказано.

Наше заключительное тождество таково:

$$\sum_{k=0}^b (-1)^k \binom{k}{a} \binom{c}{b-k} = (-1)^b \binom{b-c}{b-a}, \quad 0 \leq a \leq b. \quad (12)$$

Действительно, в силу (3), (7) и (2) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^b (-1)^k \binom{k}{a} \binom{c}{b-k} &= \sum_{k=a}^b (-1)^k \binom{k}{a} \binom{c}{b-k} \\
&= \sum_{k=a}^b (-1)^k (-1)^{k-a} \binom{-a-1}{k-a} \binom{c}{b-k} \\
&= (-1)^a \sum_{h=0}^{b-a} \binom{-a-1}{h} \binom{c}{(b-a)-h} \\
&= (-1)^a \binom{(-a-1)+c}{b-a} \\
&= (-1)^a (-1)^{b-a} \binom{-(-a-1)-c+(b-a)-1}{b-a} \\
&= (-1)^b \binom{b-c}{b-a},
\end{aligned}$$

откуда и следует (12).

Комбинаторные тождества из данного добавления можно интерпретировать как утверждения относительно произведений матриц. В качестве важного примера рассмотрим тождество (11). Пусть B и D обозначают соответственно следующие $(b+1) \times (b+1)$ -матрицы:

$$B := \left((-1)^{i+j} \binom{j}{i} \right)_{i=0, \dots, b; j=0, \dots, b},$$

$$D := \left(\binom{j}{i} \right)_{i=0, \dots, b; j=0, \dots, b}.$$

Тогда тождество (11) означает, что B и D — взаимно обратные матрицы.

Историко-библиографические замечания

Фундамент современной теории выпуклости был заложен в начале этого века Г. Минковским, К. Каратеодори и другими. Большая часть результатов гл. 1 восходит к тому времени. В качестве основных руководств по темам, обсуждаемым в гл. 1, рекомендуем книги Бондесена и Фенхеля [11], Рокафеллара [21] и Грюнбаума [12].

В гл. 2 материал §§ 7 – 12 также классический. Циклические многогранники из § 13 рассматривал ещё Каратеодори; он же обнаружил и их смежность (см. § 14). Примерно в 1955 г. эти многогранники были переоткрыты Д. Гейлом. Главный результат § 15, а именно теорема 15.6, принадлежит М. Балински (1961 г.). Незаменимым руководством по материалу гл. 2 является указанная выше книга Грюнбаума. См. также упомянутую книгу Рокафеллара (в связи с тематикой §§ 7 – 9) и книги Бэра и Фурно [1] и Макмюллена и Шепарда [18].

Формула Эйлера, представленная в гл. 3, была найдена Л. Эйлером в 1752 г. для $d = 3$. По поводу интересной истории формулы Эйлера см. [12, § 8.6]. Наше изложение следует [18].

Относительно истории уравнений Дена – Коммервилля см. [12, § 9.8]. Наши теоремы 17.1, 17.5 и 17.6 содержатся (в двойственных формах) в [12] на стр. 146, 148 и 161 соответственно.

Теорема о максимальном числе граней была высказана в качестве гипотезы Т. Мотскином в 1957 г. В последующие годы различные частные случаи были рассмотрены В. Кли и другими, а окончательное доказательство было дано Макмюлленом [16]. Как гипотеза Мотскина, так и доказательство Макмюллена (а также и все промежуточные работы) относились к симплициальным многогранникам. Наше изложение, в котором используются простые многогранники, следует работе Бондесена и А. Брэнстеда [10]. Подробнее об истории теоремы о максимальном числе граней вплоть до 1967 г. см. [12, § 10.1].

Теорема о минимальном числе граней была доказана Барнеттом [2, 3]. Наше изложение основано на его статьях [2; 3] и статье Кли [14]. Об истории теоремы о минимальном числе граней до

1967 г. см. [12, § 10.2]. Тот факт, что при $d \geq 4$ многогранники усечения — это единственные многогранники, для которых имеет место равенство, был установлен Биллерой и Ли [5].

Оценки максимального и минимального числа граней были даны также для простых неограниченных полиэдральных множеств (Кли [13], Бьёрнер [7], Биллера и Ли [6], Ли [15]).

Теорема 20.1 была высказана в качестве гипотезы Макмюлленом [17] (в постановке, относящейся к симплициальным многогранникам). Он сам доказал эту теорему для некоторых частных случаев и установил, что из его гипотезы вытекает теорема о максимальном числе граней. Ещё одна работа, связанная с теоремой 20.1, это (предшествующая [17]) статья Макмюллена и Уолкапа [19]; здесь высказано предположение о необходимости условия (b) теоремы 20.1 и доказано, что из условий (a) и (b) Макмюллена вытекает теорема о минимальном числе граней.

Достаточность условий Макмюллена была установлена Биллерой и Ли [4; 5]. В своём доказательстве (относящемся к симплициальным многогранникам) они строят симплициальный d -многогранник с заданным f -вектором $f = (f_0, \dots, f_{d-1})$ как вершинную фигуру при вершине x некоторого $(d+1)$ -многогранника вида $\text{conv}(Q \cup \{x\})$, где Q — соответствующим образом подобранный циклический $(d+1)$ -многогранник, а x — соответствующим образом подобранная точка вне Q .

Необходимость условий Макмюллена была установлена Стэнли [22]. Доказательство Стэнли (которое проводится для симплициальных многогранников) использует глубокие результаты алгебраической геометрии; было бы желательно иметь более элементарное доказательство.

В статье [6] Биллера и Ли формулируют одну гипотезу о характеристизации f -векторов простых неограниченных полиэдральных множеств.

Высказывалась гипотеза, что f -векторы симплициальных (или простых) d -многогранников P являются унимодалыми, или одновершинными, т. е.

$$f_0(P) \leq f_1(P) \leq \dots \leq f_k(P) \geq f_{k+1}(P) \geq \dots \geq f_{d-1}(P)$$

для некоторого k . — (Из необходимости условий (a) и (b) теоре-

мы 20.1 следует, что для любого простого d -многогранника P вектор $(g_0(P), \dots, g_d(P))$ унимодален. Как показал Бьёрнер [8], для любого симплициального d -многогранника P

$$f_0(P) < f_1(P) < \dots < f_{\lfloor d/2 \rfloor - 1}(P) \leq f_{\lfloor d/2 \rfloor}(P),$$

$$f_{\lfloor (d-1)/4 \rfloor}(P) > \dots > f_{d-2}(P) > f_{d-1}(P).$$

Из этих неравенств немедленно вытекает утверждаемая унимодальность для случая $d \leq 8$. Рассматривая по отдельности каждое d , можно убедиться в унимодальности f -векторов симплициальных d -многогранников даже для всех $d \leq 15$ (см. [8]). Но в общем случае эта унимодальность не имеет места: известны 20-мерные симплициальные многогранники (с числом вершин порядка 10^{13}), такие что $f_{11}(P) > f_{12}(P) < f_{13}(P)$ (см. [5; 8]).

Завершая комментарии к основному тексту, заметим, не входя в подробности, что многие комбинаторные результаты относительно выпуклых многогранников допускают обобщение на более общие геометрические объекты.

Что касается добавлений, то наше изложение теоремы Менгера (теорема Д2.1 из добавления 2) основано на книге Боллобаша [9], которую мы вообще рекомендуем читателю в качестве стандартного руководства по теории графов¹. В качестве стандартного руководства по комбинаторным тождествам (3) укажем книгу Риордана [20].

Добавление к русскому изданию

Богатые наборы смежных многогранников построены в работах Барнетта [23] и Шемера [25].

Условия Макмюллена обсуждаются в обзорных статьях Биллери [24] и Стэнли [27].

Обстоятельное описание приложений теории многогранников можно найти в книге Емеличева, Ковалёва и Кравцова [28].

¹ На русском языке можно рекомендовать книгу Уилсона [30].
Прим. ред.

Литература

1. Bair J., Fourneau R. 1980. Etude Géométrique des Espaces Vectoriels. II. Polyèdres et Polytopes Convexes, Lect. Notes in Math., No. 802, New York - Heidelberg - Berlin: Springer - Verlag.
2. Barnette D. 1971. The minimum number of vertices of a simple polytope, Israel J. Math. 10, 121 - 125.
3. Barnette D. 1973. A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes, Pacific J. Math. 46, 349 - 354.
4. Billera L. J., Lee C.W. 1980. Sufficiency of McMullen's conditions for f -vectors of simplicial polytopes, Bull.Amer. Math.Soc. (N.S.) 2, 181-185.
5. Billera L.J., Lee C.W. 1981. A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f -vectors of simplicial convex polytopes, J.Combin.Theory (Ser. A) 31 , 237-255.
6. Billera L.J., Lee C.W. 1981. The number of faces of polytope pairs and unbounded polyhedra, European J.Combin. 2, 307 - 322.
7. Björner A. 1980. The minimum number of faces of a simple polyhedron. European J.Combin. 1, 27-31.
8. Björner A. 1981. The unimodality conjecture for convex polytopes. Bull. Amer.Math.Soc. (N.S.) 4, 187 - 188.
9. Bollobás B. 1979. Graph Theory - An Introductory Course, Graduate Texts in Mathematics, Vol.63, New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag.
10. Bondesen A., Brøndsted A. 1980. A dual proof of the upper bound conjecture for convex polytopes, Math.Scand. 46, 95 - 102.
11. Bonnesen T., Fenchel W. 1934. Theorie der Konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd.3,Nr.1,

- Berlin: Verlag von Julius Springer. (Berichtigter Reprint 1974, New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag.)
12. Grünbaum B. 1967. Convex Polytopes. London - New York - Sydney: Wiley.
 13. Klee V. 1974. Polytope pairs and their relationship to linear programming, *Acta Math.* 133, 1 - 25.
 14. Klee V. 1975. A d -pseudomanifold with f_0 vertices has at least $df_0 - (d-1)(d+2)$ d -simplices, *Houston J. Math.* 1, 81 - 86.
 15. Lee C.W. 1984. Bounding the numbers of faces of polytope pairs and simple polyhedra, *Ann. Discrete Math.* 20, 215 - 232.
 16. McMullen P. 1971. The maximum numbers of faces of convex polytope. *Mathematika* 17, 179-184.
 17. McMullen P. 1971. The numbers of faces of simplicial polytopes, *Israel J. Math.* 9, 559-570.
 18. McMullen P., Shephard G.C. 1971. Convex Polytopes and Upper Bound Conjecture, London Math. Soc. Lect. Note Ser. Vol. 3, Cambridge: Cambridge University Press.
 19. McMullen P., Walkup D.W. 1971. A generalized lower-bound conjecture for simplicial polytopes, *Mathematika* 18, 264 - 273.
 20. Riordan J. 1968. Combinatorial Identities, New York - London - Sydney: Wiley. [Имеется перевод: Риордан Дж. Комбинаторные тождества. - М.: Наука, 1982.]
 21. Rockafellar R.T. 1970. Convex Analysis, Princeton, N.J.: Princeton University Press. [Имеется перевод: Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.]
 22. Stanley R.P. 1980. The number of faces of simplicial convex polytope, *Adv. Math.* 35, 236 - 238.

Добавление к русскому изданию¹

23. Barnette D. 1981. A family of neighborly polytopes, *Israel J. Math.* 39, 127-140.

¹ Звёздочкой помечены работы, добавленные редактором перевода. - Прим. перев.

- 24. Billera L.J. 1983. Polyhedral theory and commutative algebra, in: Mathematical Programming, The State of the Art, Bonn 1982, 57 - 77.
- 25. Shemer I. 1982. Neighborly polytopes, Israel J. Math. 43, 291 - 314.
- *26. Stanley R.P. 1983. Combinatorics and Commutative Algebra, Boston: Birkhäuser.
- 27. Stanley R.P. 1985, The number of faces of simplicial polytopes and spheres, Ann. New York Acad.Sci. 440, 212 - 223.
- 28. Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. - М.: Наука, 1981.
- *29. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. - М.: Наука, 1985.
- *30. Уилсон Р. Введение в теорию графов. - М.: Мир, 1977.

Список обозначений

$\emptyset$	пустое множество
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{R}$	множество вещественных чисел
$\mathbb{R}^d$	множество наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, состоящих из d вещественных чисел
$[0, 1]$	множество вещественных чисел α , удовлетворяющих условию $0 \leq \alpha \leq 1$
$]0, 1]$	множество вещественных чисел α , удовлетворяющих условию $0 < \alpha \leq 1$
$[0, 1[$	множество вещественных чисел α , удовлетворяющих условию $0 \leq \alpha < 1$
$]0, 1[$	множество вещественных чисел α , удовлетворяющих условию $0 < \alpha < 1$
σ	нулевой элемент $(0, \dots, 0)$ в $\mathbb{R}^d$
$\text{aff } M$	аффинная оболочка множества M 16
$\text{bd } M$	граница множества M
$\text{card } M$	мощность множества M
$\text{cl } M$	замыкание множества M
$\text{clconv } M$	замкнутая выпуклая оболочка множества M 42
$\text{conv } M$	выпуклая оболочка множества M 24
$\text{dim } A$	размерность аффинного подпространства A 16
$\text{dim } C$	размерность выпуклого множества C 35
$\text{dim } L$	размерность линейного подпространства L 13
$\text{exp } C$	множество выступающих точек замкнутого выпуклого множества C 53
$\text{ext } C$	множество крайних точек замкнутого выпуклого множества C 51, 74
$\text{int } M$	внутренность множества M

$rb\ C$	относительная граница выпуклого множества C	34
$ri\ C$	относительная внутренность выпуклого множества C	34
$\text{span}\ M$	линейная оболочка множества M	13
$\mathcal{M}_d$	моментная кривая в $\mathbb{R}^d$	134
$\mathcal{P}^d$	множество d -многогранников	154
$\mathcal{P}_\sigma^d$	множество простых d -многогранников	162
$\mathcal{P}_s^d$	множество симплицальных d -многогранников	162
$\mathcal{E}(C)$	множество выступающих граней замкнутого выпуклого множества C	53
$\mathcal{F}(C)$	множество граней замкнутого выпуклого множества C	52
$\mathcal{F}(P/x_0)$	множество граней F многогранника P , удовлетворяющих условию $x_0 \in F \subset P$	109
$\mathcal{F}(F_2/F_1)$	множество граней F многогранника P , удовлетворяющих условию $F_1 \subset F \subset F_2$	110
$\mathcal{F}_j(P)$	множество j -граней многогранника P	156
$\mathcal{G}(P)$	граф многогранника P	146
$\mathcal{G}(P, w)$	ориентированный граф многогранника P , отвечающий допустимому вектору w	148
$\mathcal{G}(\mathcal{F})$	граф системы гиперграней $\mathcal{F}$	151
$f(P)$	f -вектор многогранника P	105
$f(\mathcal{P}^d)$	множество f -векторов d -многогранников	154
$f(\mathcal{P}_\sigma^d)$	множество f -векторов простых d -многогранников	162
$f_j(P)$	число j -граней многогранника P	105
$f_j(F_2/F_1)$	число j -граней Γ многогранника P , удовлетворяющих условию $F_1 \subset F \subset F_2$	161
$g_i(P)$	число вершин в $\mathcal{G}(P, w)$ с валентностью входа i	178
$g_i(f)$		201
$\Phi_j(d, p)$		175
$\varphi_j(d, p)$		188
$B(z, r)$	замкнутый шар с центром z и радиусом r	64
$C(n, d)$	тип циклического многогранника	135
$H(y, \alpha)$		19
$H(\varepsilon, 1 - (-1)^d)$	эйлерова гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$	159
$K(y, \alpha)$		19

$\ u\ $	обычная евклидова норма в $\mathbb{R}^d$
$[a]$	целая часть числа a
$M^\perp$	аннулятор множества M , ортогональное дополнение к $\text{span } M$
M°	полюра множества M 63
$M^{\circ\circ}$	биполюра множества M , полюра M° 64
F^Δ	выступающая грань, сопряжённая к выступающей грани F 67
$F^{\Delta\Delta}$	выступающая грань, сопряжённая к выступающей грани F^Δ 68
$\langle u, v \rangle$	обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$
$[x_1, x_2]$	отрезок (замкнутый интервал) 22
$]x_1, x_2]$	полуоткрытый интервал 22
$[x_1, x_2[$	полуоткрытый интервал 22
$]x_1, x_2[$	(открытый) интервал 22
$h^{(k)}$	k -я псевдостепень h 202
$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$	аффинная комбинация 15
$\sum_{i=1}^n \lambda_i^c x_i$	выпуклая комбинация 22
m	в §§ 17 – 20: $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$
n	в §§ 17 – 20: $\lfloor d/2 \rfloor$
$\subset$	является подмножеством
$\subsetneq$	является собственным подмножеством
$\not\subset$	не является подмножеством

Именной указатель

Андерсен (E.S. Andersen) 7

Балинский (M. Balinski) 223

Барнетт (D. Barnette) 6, 188,
223, 225

Биллера (L.J. Billera) 7, 201,
224, 225

Боллобаш (B. Bollobás) 225

Бондесен (A. Bondesen) 7, 223

Боннезен (T. Bonnesen) 223

Брёнстед (A. Brønsted) 7, 223

Бьёрнер (A. Björner) 224, 225

Бэр (J. Bair) 223

Гейл (D. Gale) 223

Грюнбаум (B. Grünbaum) 223

Емеличев В.А. 5, 225

Каратеодори (C. Carathéodory)
223

Кашин Б.С. 5

Кли (V. Klee) 7, 223, 224

Ковалёв М.М. 5, 225

Кравцов М.К. 5, 225

Ли (C.W. Lee) 7, 201, 224

Макмоллен (P. McMullen) 6, 173,
201, 223, 224

Минковский (H. Minkowski) 223

Мотзкин (T.S. Motzkin) 223

Риордан (J. Riordan) 225

Рокафеллар (R.T. Rockafellar)
223

Стэнли (R.P. Stanley) 7, 201,
224, 225

Уилсон (R.J. Wilson) 225

Уолкап (D.W. Walkup) 224

Фенхель (W. Fenchel) 223

Фурно (R. Fourneau) 223

Шмер (I. Shemer) 225

Шепард (G.C. Shephard) 223

Эйлер (L. Euler) 223

Якобсен (U. Jacobsen) 7

Предметный указатель

антиизоморфизм (anti-isomorphism) 208

аффинный ⟨-ая, -ое⟩ (affine)

- базис 16

- зависимость 16

- изоморфизм 19

- комбинация 15

- независимость 16

- оболочка 16

- отображение 18

- подпространство 14

- - дополнительное 21

- - натянутое на M , или порождённое M 16

- - опорное 61

- - ортогональное 21

- - параллельное 21

- пространство 15

- функция 18

базис (basis)

- аффинный 16

- выпуклый 28

- линейный 13

биполяра (bipolar) 64

бипирамида (bipyramid) 81

- n -кратная 82

валентность (valence) 209

- входа (in- $\sim$) 216

- - относительная (relative $\sim$) 180

- выхода (out- $\sim$) 216

Вандермонда тождество (Vandermonde Convolution) 218

вектор (vector) 12

- допустимый 147

- унимодальный, или одновершинный (unimodal $\sim$) 224

- чисел граней (face- $\sim$) 105

верхняя грань (upper bound) 207

- - точная (least $\sim \sim$) 207

вершина (vertex, но вершина пирамиды или бипирамиды - apex)

- бипирамиды 81

- внутренняя (internal $\sim$) 189

- многогранника 74

- наружная (external $\sim$) 189

- неориентированного графа 209

- ориентированного графа 215

- пирамиды 78

- симплекса 27

выпуклый ⟨-ая, -ое⟩ (convex)

- базис 28

- замкнутая оболочка 42

- комбинация 22

- множество 22

- - натянутое на M , или поро-
ждённое M 24
- независимость 33
- оболочка 24
- выступающая (exposed)
- грань 51
- - несобственная 52
- - собственная 52
- точка 53
- вытягивание вершины (pulling
a vertex) 120

Гейла условие чётности (Gale's
Evenness Condition) 137

гипергрань (facet) 51

гиперплоскость (hyperplane)
18

- опорная 44
- - собственная 44
- разделяющая 50
- сильно разделяющая 50
- собственно разделяющая 50
- гранная структура (facial
structure) 50
- грань (face) 51
- выступающая 51
- - несобственная 52
- - собственная 52
- несобственная 51
- собственная 51
- сопряжённая 69
- граф (graph) 209
- многогранника 146
- неориентированный 209
- несвязный 210
- ориентированный 215
- плоский 152
- связный 210
- k -связный 210

двойственный многогранник (du-
al polytope) 102

Дена - Коммервилля система
(Dehn-Sommerville System)
168

- - - минимальная (minimal $\sim \sim$)
168

- - уравнения ($\sim$ Relations)
162

добавление пирамиды (adding a
pyramid) 120

дополнительные аффинные под-
пространства (complementary
affine subspaces) 21

допустимый вектор (admissible
vector) 147

дуально-смежностный многогран-
ник (dual neighbourly poly-
tope) 146

зависимость (dependence)

- аффинная 16

- линейная 13

замкнутый $\langle$ -ая, -ое $\rangle$ (closed)

- выпуклая оболочка 42

- интервал ($\sim$ segment) 22

- полупространство 18

- шар 64

изоморфизм (isomorphism)

- аффинный 19

- линейный 14

- решёток 208

инцидентности отношение (inci-
dence relation)

- - для неориентированного
графа 209

- - для ориентированного гра-
фа 215

- инцидентность (incidence)
182, 198
- инцидентные (incident)
- вершина и ребро графа 209
- - - - многогранника 105
- каноническое k -представление
(k -canonical representation) 202
- Каратеодори теорема (Carathéodory's Theorem) 27
- комбинация (combination)
- аффинная 15
- выпуклая 22
- линейная 12
- компонента (component) 137
- нечётная 137
- собственная 137
- чётная 137
- концевая вершина (endvertex)
- - пути 209
- - ребра 209
- крайняя точка (extreme point)
51
- крестовый многогранник (cross-polytope) 82
- - регулярный (regular $\sim$)
82
- куб (cube) 83
- линейный $\langle$ -ая, -ое $\rangle$ (linear)
- базис 13
- изоморфизм 14
- зависимость 13
- комбинация 12
- независимость 13
- оболочка 13
- отображение 14
- подпространство 12
- - натянутое на M , или порождённое M 13
- Макмиллена условия (McMullen's Conditions) 203
- Менгера теорема (Menger's Theorem) 225
- Минковского теорема (Minkowski's Theorem) 60
- многогранник (polytope) 27
- выпуклый 27
- двойственный 102
- дуально-смежностный 146
- пирамидальной надстройки 201
- простой 126
- симплицальный 125
- смежностный 146
- усечения 200
- циклический 135
- эквивалентный 101
- k -простой 133
- k -симплицальный 133
- k -смежностный 142
- моментная кривая (moment curve)
134
- направленное (oriented) ребро
216
- натянутый $\langle$ -ое $\rangle$ на M (spanned by M)
- - - аффинное подпространство
16
- - - выпуклое множество 24
- - - линейное подпространство
13
- независимость (indipendence)
- аффинная 16
- выпуклая 33
- линейная 13

- независимые пути (indipendent paths) 210
 неориентированный граф (non-oriented graph) 209
 неприводимое представление (irreducible representation) 85
 несвязный граф (disconnected graph) 210
 несобственная (improper)
 - выступающая грань 52
 - грань 52
 нечётная (odd) компонента 137
 нижняя грань (lower bound) 207
 - - точная (greatest $\sim \sim$) 207
 нормаль (normal) 19

 оболочка (hull)
 - аффинная 16
 - выпуклая 24
 - замкнутая выпуклая 42
 - линейная 13
 общее положение (general position) 21
 объединение (union) подграфов 211
 односторонность (unimodality) 224
 односвязность (1-connectedness) 210
 октаэдр (octahedron) 82
 опорная $\langle -oe \rangle$ (supporting)
 - гиперплоскость 44
 - - собственная 44
 - подпространство 61
 - полупространство 44
 ориентированный граф (oriented graph) 215
 - - многогранника 147-148
 ортогональная $\langle -oe \rangle$ (orthogonal)
 - аффинное подпространство 21
 - проекция 21
 основание (basis)
 - бипирамиды 81
 - пирамиды 78
 открытый $\langle -oe \rangle$ (open)
 - интервал ($\sim$ segment) 22
 - полупространство 18
 относительная (relative)
 - внутренность ($\sim$ interior) 34
 - граница ($\sim$ boundary) 34
 отображение (mapping)
 - аффинное 18
 - линейное 14
 отрезок (closed segment) 22

 параллелепипед (parallellotope) 83
 параллельные аффинные подпространства (parallel affine subspaces) 21
 пирамида (pyramid) 78
 - n -кратная (n -fold)) 82
 пирамидальной надстройки многогранник (stacked polytope) 201
 плоский граф (planar graph) 152
 подграф (subgraph) 210
 - порождённый 210
 подпространство (subspace)
 - аффинное 14
 - дополнительное 21
 - линейное 12
 - натянутое на M 13, 16

- опорное 61
- ортогональное 21
- параллельное 21
- порождённое 13, 16
- полиэдральное множество (polyhedral set) 84
- подрешётка (sublattice) 208
- полуоткрытый интервал (half-open segment) 22
- полупространство (halfspace)
 - замкнутое 18
 - опорное 44
 - открытое 18
- полупрямая (halfline) 19
- полуразвёртка (semi-shelling) 152
- полюса (polar set) 63
- порождённый см. натянутый
 - подграф (spanned subgraph) 210
- представление (representation)
 - полиэдрального множества 85
 - неприводимое 85
 - приводимое 85
- приводимое (reducible) представление 85
- призма (prism) 82
 - n -кратная (n -fold $\sim$) 83
- проекция (projection) 21
 - ортогональная 21
- простой многогранник (simple polytope) 126
- пространство (space)
 - аффинное 15
 - евклидово 11
- прямая (line) 15, 17
- псевдостепень (pseudopower) 202
- путь (path) 209
- Радона теорема (Radon's Theorem) 29
- развёртка (shelling) 152
- разделённые (separated) вершины графа 210
- разделяющая (separating) гиперплоскость 50
- размерность (dimension)
 - аффинного пространства 16
 - выпуклого множества 35
 - линейного подпространства 13
- ребро (edge)
 - внешнее (external $\sim$) 182
 - многогранника 74
 - неориентированного графа 209
 - ориентированного графа 215
- решётка (lattice) 207
 - граней (face- $\sim$) 52
 - полная (complete $\sim$) 208
- связный $\langle$ -ая $\rangle$ (connected)
 - граф 210
 - система гиперграней 151
- сечение (section) многогранника 100
- сильно разделяющая (strongly separating) гиперплоскость 50
- симплекс (simplex) 27
- симплициальный многогранник (simplicial polytope) 125
- система гиперграней (facet system) 151
 - - связная 151
- смежностный многогранник (neighbourly polytope) 146
- смежные вершины (adjacent vertices)
 - - графа 209

- - многогранника 104
- собственная (proper)
- выступающая грань 52
- грань 52
- компонента 137
- опорная гиперплоскость 44
- собственно разделяющая (properly separating) гиперплоскость 50
- соединяющий $\langle -ee \rangle$ (joining)
- путь 209
- ребро 209
- сопряжённая (conjugate)
- грань 69
- срезка (truncation) 120
- Страшевича теорема (Straszewicz's Theorem) 62
- теорема о максимальном числе граней (Upper Bound Theorem) 173, 175
- о минимальном числе граней (Lower Bound Theorem) 188
- тетраэдр (tetrahedron) 73
- точка (point) 15
- выступающая 53
- крайняя 51
- относительно-внутренняя (relative interior $\sim$) 34
- относительно-граничная (relative boundary $\sim$) 34
- треугольник (triangle) 73
- унимодальность (unimodality) 224
- усечения многогранник (truncation polytope) 200
- Хелли теорема (Helly's Theorem) 33
- циклический (cyclic) многогранник 135
- частично упорядоченное множество (partially ordered set) 207
- частичный порядок (partial order) 207
- чётная компонента (even component) 137
- Штейница теорема (Steinitz's Theorem) 152
- эвклидово пространство (Euclidean space) 11
- Эйлера теорема (Euler's Theorem) 8
- формула ($\sim$ Relation) 154
- эйлерова гиперплоскость (Euler Hyperplane) 159
- эквивалент (equivalent) 101
- эквивалентные (equivalent) многогранники 101
- f -вектор 105
- k -бипирамида 81
- k -грань 51
- k -инцидентность 182, 198
- k -кратная (k -fold)
- бипирамида 82
- пирамида 82
- призма 83
- k -многогранник 73
- k -пирамида 78
- k -простой многогранник 133
- k -связный граф 210
- k -симплекс 73
- k -симплициальный многогранник 133
- k -смежностный многогранник 142

Оглавление

От редактора перевода	5
Предисловие	6
Введение	8
<u>Глава 1. Выпуклые множества</u>	11
§ 1. Аффинная структура пространства $\mathbb{R}^d$	11
§ 2. Выпуклые множества	21
§ 3. Относительная внутренность выпуклого множества....	34
§ 4. Опорные гиперплоскости и полупространства	44
§ 5. Гранная структура замкнутого выпуклого множества..	50
§ 6. Полярность	62
<u>Глава 2. Выпуклые многогранники</u>	73
§ 7. Многогранники	73
§ 8. Полиэдральные множества	83
§ 9. Полярность многогранников и полиэдральных множеств	91
§10. Эквивалентность и двойственность многогранников...	100
§11. Вершинные фигуры	107
§12. Простые и симплицальные многогранники.....	121
§13. Циклические многогранники	133
§14. Смежностные многогранники	142
§15. Граф многогранника	146
<u>Глава 3. Комбинаторная теория выпуклых многогранников</u>	153
§16. Формула Эйлера	153
§17. Уравнения Дена – Коммервилля.....	162
§18. Теорема о максимальном числе граней.....	173
§19. Теорема о минимальном числе граней.....	188
§20. Условия Макмиллена.....	201

Добавление 1. Решётки	207
Добавление 2. Графы	209
Добавление 3. Комбинаторные тождества	217
Историко-библиографические замечания	223
Литература	226
Список обозначений	229
Именной указатель	232
Предметный указатель	233

Научное издание

Арне Брэнстед

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Заведующий редакцией чл.-корр. АН СССР В.И. Арнольд

Зам. зав. редакцией А.С. Попов

Ст. научный редактор В.И. Авербух

Мл. научный редактор Л.А. Королёва

Художник В.С. Потапов

Художественный редактор В.И. Шаповалов

Технический редактор И.М. Кренделёва

Корректор Л.Д. Панова

ИБ. № 6539

Подписано к печати 18.07.88. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Объем 7,50 бум.л.

Усл. печ. л. 13,95. Усл. кр.-отт. 14,18. Уч. изд. л.

11,09. Изд. № 1/5538. Тираж 3750 экз. Зак. 2690

Цена 1 р. 70 коп.

Издательство "МИР" В/О "Совэкспорткнига" Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 9 НПО "Всесоюзная книжная палата" Госкомиздата СССР.

109033, Москва, ул. Волочаевская, 40.

Цель настоящей книги – ввести читателя в чарующий мир выпуклых многогранников.

Кульминационные моменты книги – это три главные теоремы комбинаторной теории выпуклых многогранников, известные как соотношения (или уравнения) Дена – Соммервиля, теорема о максимальном числе граней и теорема о минимальном числе граней. Все предварительные сведения о выпуклых множествах и выпуклых многогранниках, нужные для того, чтобы понять и в должной мере оценить эти три теоремы, подробно излагаются в книге.

... Требования, предъявляемые к подготовке читателя, весьма скромны; обычная линейная алгебра и элементарные факты о топологии пространства $\mathbb{R}^d$ – вот и всё, что нужно.

Из предисловия автора

ISBN 5-03-001115-3 (русск.)

ISBN 0-387-90722-X (англ.)